

**LAURO CÉSAR GALVÃO**

**DIMENSIONAMENTO DE SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO ATRAVÉS  
DO DIAGRAMA MULTIPLICATIVO DE VORONOI COM PESOS**

**Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas – Área de Concentração: Transportes e Logística da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.**

**Orientador: Prof. Dr. João Carlos Souza**

**FLORIANÓPOLIS, 21 DE FEVEREIRO DE 2003.**

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

**LAURO CÉSAR GALVÃO**

### **DIMENSIONAMENTO DE SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO ATRAVÉS DO DIAGRAMA MULTIPLICATIVO DE VORONOI COM PESOS**

Tese apresentada como requisito para obtenção do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas – Área de Concentração: Transportes e Logística, Universidade Federal de Santa Catarina, pela seguinte banca examinadora:

---

Prof. Edson Pacheco Paladini, Dr.  
Coordenador

---

Prof. João Carlos Souza, Dr.  
Departamento de Arquitetura e  
Urbanismo, UFSC  
Orientador

---

Prof. José Eduardo de Souza Cursi, Dr.  
INSA de Rouen, França  
Co-Orientador e Examinador Externo

---

Profa. Yaeko Yamashita, Dra.  
Universidade de Brasília, DF  
Examinadora Externa

---

Prof. Antônio Galvão N. Novaes, Dr.  
Programa de Pós Graduação em  
Engenharia de Produção, UFSC  
Co-Orientador

---

Profa. Mirian Buss Gonçalves, Dra.  
Programa de Pós Graduação em  
Engenharia de Produção, UFSC

---

Prof. Rutsnei Schmitz, Dr.  
Programa de Pós Graduação em  
Engenharia de Produção, UFSC  
Moderador

Florianópolis, 21 de fevereiro de 2003.

Este trabalho é dedicado a minha esposa Luciana e  
aos meus pais José e Astézia

## **AGRADECIMENTOS**

Este trabalho foi desenvolvido graças ao apoio e à confiança de meu orientador, Prof. João Carlos Souza. Ao Prof. João Carlos agradeço o ensinamento e o incentivo que me passou desde o início.

Ao Prof. Antônio Galvão N. Novaes, co-orientador desse trabalho, que com sua experiência indicou os caminhos que possibilitaram o desenvolvimento desta tese.

Sou grato ao co-orientador pela França, Prof. José Eduardo de Souza Cursi, com quem tive o prazer de trabalhar durante minha permanência no INSA-Rouen, França.

Agradeço aos professores e colegas do Grupo de Pesquisa em Transporte e Logística do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

Aos professores, funcionários, amigos e colegas do Institut National des Sciences Appliquées de Rouen (INSA-Rouen) – França, agradeço pela dedicação e pela experiência gratificante que proporcionaram a mim e a minha esposa.

Agradeço aos professores-membros da Banca Examinadora, pela inestimável contribuição ao trabalho.

Ao CNPq agradeço a ajuda financeira, em forma de bolsa de estudos para Doutorado Sanduíche, durante o período de um ano em que permaneci na França.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (CEFET-PR) agradeço a ajuda em forma de dispensa por quatro anos para a realização deste curso.

Aos professores, funcionários, colegas e amigos do Departamento Acadêmico de Matemática (DAMAT) do CEFET-PR, os quais, por total colaboração à pesquisa científica, facilitaram minha saída para o doutorado.

Agradeço, aos amigos Ademir, Arinei e José João, a paciência que tiveram comigo e a colaboração em partes importantes da minha tese.

Ao meu amigo Luiz Fernando Nunes que me incentivou e acreditou em mim, mais do que eu mesmo.

Agradeço também a minha família o carinho sempre presente e, principalmente, as minhas irmãs Helena, Lurdinha e Terezinha.

## SUMÁRIO

TERMO DE APROVAÇÃO .....	II
AGRADECIMENTOS .....	IV
SUMÁRIO .....	V
ÍNDICE DE FIGURAS .....	IX
RESUMO.....	XII
ABSTRACT .....	XIII
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 PROBLEMA .....	1
1.2 HIPÓTESE .....	1
1.3 OBJETIVO GERAL .....	2
1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	2
1.4.1 Função Contínua de Aproximação.....	3
1.4.2 Distribuição Polar.....	3
1.4.3 Distribuição de Voronoi .....	5
1.5 JUSTIFICATIVA.....	6
1.6 LIMITAÇÕES DO TRABALHO .....	7
1.7 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	7
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>9</b>
2.1 PERCURSO DO VEÍCULO NA ZONA DE ENTREGA.....	9
2.1.1 Aproximação da Distância na Zona de Entrega.....	9
2.1.2 Correções Devido à Rede Viária.....	18
2.2 PROBLEMA CLÁSSICO DE DISTRIBUIÇÃO FÍSICA DE PRODUTOS .....	19
2.2.1 Custos.....	22
2.2.2 Zoneamento.....	24
2.2.3 Estratégias Operacionais.....	27
2.3 MODELO CONTÍNUO PARA DESIGNAÇÃO DE SISTEMA EM PRODUÇÃO-DISTRIBUIÇÃO .....	30
2.4 MODELO QUE UTILIZA DIAGRAMAS DE VORONOI ASSOCIADO A PROBLEMAS LOGÍSTICOS .....	31
2.5 CONSIDERAÇÕES .....	32
<b>3 METODOLOGIA PROPOSTA .....</b>	<b>33</b>
BASE PARA A METODOLOGIA PROPOSTA .....	34
<b>4 FUNÇÃO CONTÍNUA DE APROXIMAÇÃO.....</b>	<b>36</b>
4.1 MODELO PARA A CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO.....	36
4.2 NÚMERO DE PONTOS EM UMA ÁREA LIMITADA .....	37

4.3	FUNÇÃO CONTAGEM .....	37
4.4	DESENVOLVIMENTO DA MALHA .....	39
4.5	OBSERVAÇÕES SOBRE A MALHA .....	39
4.6	RESULTADO DOS TESTES .....	41
4.7	COMENTÁRIOS .....	42
5	PROBLEMA INICIAL .....	43
5.1	MÉTODO GERAL PARA RESOLVER PROBLEMAS DE DISTRIBUIÇÃO .....	44
5.2	APROXIMAÇÃO SPLINE UTILIZANDO UMA FUNÇÃO DE BASE .....	47
6	MÉTODO PROPOSTO PARA RESOLVER O PROBLEMA INICIAL .....	50
6.1	DISTRIBUIÇÃO DO SISTEMA ATRAVÉS DE COORDENADAS POLARES .....	50
6.1.1	Introdução .....	50
6.1.2	Algumas Definições Importantes .....	52
	Definições em Relação aos Anéis .....	52
	Definição P1 – Anel Fechado .....	53
	Definição P2 – Anel Aberto .....	53
	Definição P3 – Anel Livre .....	53
	Definição P4 – Anel Restrito .....	54
	Adaptações em um Distrito para a Forma Polar de Processos de Aproximação .....	54
	Fator de Esbeltez para um Distrito de Forma Retangular .....	54
	Distância e Tempo de Viagem em um Distrito $D_i$ .....	54
	Considerações para os Distritos Seguindo-se a Forma Polar .....	57
6.1.3	Obtenção das Regiões em Relação à Distribuição .....	60
	Dados obtidos através das Retículas, dentro da Malha .....	60
	Área de cada Distrito ( $A_z$ ) .....	60
	Carga para cada Distrito ( $U_p$ ) .....	61
	Número de Pontos Atendidos por cada Veículo ( $n_i$ ) .....	61
	Tempo Despendido nos Atendimentos em cada Rota ( $T_p$ ) .....	61
	Construção dos Distritos .....	62
	Constatação em Relação aos Anéis .....	66
	Correção da esbeltez .....	69
6.2	DISTRIBUIÇÃO DO SISTEMA ATRAVÉS DO DIAGRAMA MULTIPLICATIVO DE VORONOI COM PESOS .....	70
6.2.1	Introdução .....	70
6.2.2	Convergência da Distribuição de Voronoi .....	71
	Criação dos Vetores para a Convergência de Voronoi .....	73
	Posicionamento de Cada Zona em Relação ao Vetor $VI$ para o Incremento Obtido do Vetor $VV$ .....	77
	Convergência de Voronoi em Relação aos Vetores $VI$ e $VV$ .....	79
7	RESULTADOS COMPUTACIONAIS .....	84
7.1	INTRODUÇÃO .....	84
7.2	DISTRIBUIÇÃO ESPACIAL DOS PONTOS DE ATENDIMENTO .....	85
7.3	GRÁFICO DA APROXIMAÇÃO POR SPLINES EM UMA MALHA COM RETÍCULAS DE 200 METROS .....	86
7.4	SEQÜÊNCIA DE DETERMINAÇÃO DOS DISTRITOS (ZONAS) .....	87

<b>7.5 APLICAÇÃO DO ALGORITMO COM RETÍCULAS DE DIMENSÃO DE 35 METROS.....</b>	<b>89</b>
7.5.1 Resultado Gráfico da Divisão Polar (35 Metros) .....	89
7.5.2 Resultado Gráfico da Divisão de Voronoi (35 Metros).....	90
7.5.3 Valores Obtidos para a Divisão Polar (35 Metros) .....	91
Interpretação dos Valores da Figura 7.5.3 .....	91
7.5.4 Valores Obtidos para a Divisão de Voronoi (35 Metros).....	92
<b>7.6 APLICAÇÃO DO ALGORITMO COM RETÍCULAS DE DIMENSÃO DE 138 METROS.....</b>	<b>93</b>
7.6.1 Resultado Gráfico da Divisão Polar (138 Metros) .....	93
7.6.2 Resultado Gráfico da Divisão de Voronoi (138 Metros).....	94
7.6.3 Valores Obtidos para a Divisão Polar (138 Metros) .....	95
Interpretação dos Valores da Figura 7.6.3 .....	95
7.6.4 Valores Obtidos para a Divisão de Voronoi (138 Metros).....	96
<b>7.7 APLICAÇÃO DO ALGORITMO COM RETÍCULAS DE DIMENSÃO DE 196 METROS.....</b>	<b>97</b>
7.7.1 Resultado Gráfico da Divisão Polar (196 Metros) .....	97
7.7.2 Resultado Gráfico da Divisão de Voronoi (196 Metros).....	98
7.7.3 Valores Obtidos para a Divisão Polar (196 Metros) .....	99
Interpretação dos Valores da Figura 7.7.3 .....	99
7.7.4 Valores Obtidos para a Divisão de Voronoi (196 Metros).....	100
<b>8 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....</b>	<b>101</b>
8.1 CONCLUSÕES .....	101
8.2 RECOMENDAÇÕES .....	102
8.3 CONTRIBUIÇÃO PARA A CIÊNCIA .....	104
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>105</b>
<b>9 ANEXO 1 - DIAGRAMAS DE VORONOI .....</b>	<b>109</b>
<b>9.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS DOS DIAGRAMAS DE VORONOI .....</b>	<b>109</b>
9.1.1 Definições Para o Diagrama Comum de Voronoi .....	109
Definição V1 – Diagrama Comum de Voronoi no Plano .....	110
Definição V2 – Um Diagrama Comum de Voronoi no Plano.....	111
Hipótese V1 (a hipótese não degenerada) .....	112
Definição V3 – Um Diagrama Comum de Voronoi no Plano definido com Semiplanos.....	115
Definição V4 – Um Diagrama Comum de Voronoi em $R^m$ .....	115
9.1.2 Definição de Uma Tecelagem de Delaunay (Triangulação de Delaunay) .....	117
Hipótese D1 (hipótese de não colinearidade).....	118
Definição D1 (uma triangulação de Delaunay).....	120
Definição D2 (a Triangulação de Delaunay).....	121
Definição D3 (uma tecelagem de Delaunay m-dimensional) .....	123
9.1.3 Propriedades Básicas do Diagrama de Voronoi.....	124
Propriedade V1 .....	124
Propriedade V2.....	125
Propriedade V3.....	125
Propriedade V4.....	126
Propriedade V5.....	126

Problema P1 (o problema do par mais íntimo).....	126
Problema P2 (o problema de todo vizinho mais próximo) .....	127
Propriedade V6.....	127
Problema P3 (o problema da procura mais próxima).....	127
Propriedade V7.....	128
Hipótese V2 (a hipótese da não cocircularidade).....	129
Propriedade V8.....	130
Propriedade V9.....	130
Propriedade V10.....	130
Propriedade V11.....	131
Propriedade V12.....	132
Propriedade V13.....	132
Propriedade V14.....	132
Propriedade V15.....	133
Propriedade V16.....	133
Propriedade V17.....	134
<b>9.2 GENERALIZAÇÕES DOS DIAGRAMAS DE VORONOI .....</b>	<b>134</b>
<b>9.2.1 Diagrama de Voronoi com Pesos .....</b>	<b>134</b>
Diagrama de Voronoi Multiplicativo por Pesos .....	135
Propriedade MW1.....	138
Propriedade MW2.....	138
Propriedade MW3.....	139
<b>10 ANEXO 2 - APROXIMAÇÕES CONTÍNUAS .....</b>	<b>140</b>
<b>10.1 MODELOS SPLINES .....</b>	<b>140</b>
<b>10.2 INTERPOLAÇÃO COM SPLINES .....</b>	<b>141</b>
<b>10.3 MODELOS BIVARIADOS.....</b>	<b>146</b>
<b>10.3.1 Formas-produto spline .....</b>	<b>148</b>
Interpolação com splines.....	149
B-spline bi-variada .....	154
<b>10.3.2 Ajuste a dados esparsos: um estudo de caso.....</b>	<b>156</b>
Deformação .....	158
Elementos finitos.....	160
Métodos aproximativos .....	160



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 – Forma polar de determinação dos limites de um distrito .....	4
Figura 1.2 – Construção de um anel.....	4
Figura 1.3 – Determinação dos limites das Zonas (Forma Polar e Forma de Voronoi) .....	5
Figura 2.1.1 – Estratégia Proposta por Daganzo .....	10
Figura 2.1.2 – Distância Euclidiana e Retangular .....	11
Figura 2.1.3 – Tipos de Curvas de Peano Recursivas.....	13
Figura 2.1.4 – Rota obtida pela estratégia de Curvas de Peano .....	14
Figura 2.1.5 – Zona de Serviço (Grade) .....	15
Figura 2.1.6 – Grade com arestas adicionais que permite uma Rota de Euler .....	15
Figura 2.1.7 – Estratégias de Varredura sobre a Zona de Serviço.....	16
Figura 2.2.1 – Esquema Geral de um Sistema de Coleta/Distribuição .....	21
Figura 2.2.2 – Alongamento da Zona em direção ao depósito .....	24
Figura 2.2.3 – Representação Reticulada de uma Região de Distribuição .....	27
Figura 2.2.4 – Estratégias de Roteamento Duplo e Simples.....	29
Figura 3.1 – Fluxograma do modelo.....	34
Figura 4.1 – Pontos aleatórios distribuídos no Plano .....	36
Figura 4.2 – Pontos em uma área retangular.....	37
Figura 4.3 – Pontos da função contagem.....	38
Figura 4.4 – Obtenção do número de pontos através da função contagem .....	38
Figura 4.5 – Obtenção de uma malha de $15 \times 13$ .....	39
Figura 4.6 – Aproximação de um ponto não pertencente à interseção da malha.....	40
Figura 5.1 – Clientes sobre uma área de distribuição .....	44
Figura 5.2 – Malha inicial sobre uma área de distribuição .....	45
Figura 5.3 – Splines naturais interpoladoras. ....	46
Figura 5.4 – Variação da malha inicial.....	48
Figura 5.5 – Variação da malha refinada e a definição da fronteira do domínio .....	49
Figura 6.1.1 – Determinação dos limites de UMA ZONA.....	51
Figura 6.1.2 – Construção de Um Anel .....	52
Figura 6.1.3 – Anel Fechado.....	53
Figura 6.1.4 – Anel Aberto .....	53
Figura 6.1.5 – Anel Livre.....	53
Figura 6.1.6 – Anel Restrito .....	54
Figura 6.1.7 – Fator de Esbeltez de um Distrito .....	57
Figura 6.1.8 – Primeiro Distrito com Raio R1 (Depósito Dentro da Região) .....	62
Figura 6.1.9 – Primeiro Distrito com Raio R1 e Interseção com a Fronteira (Depósito Dentro da Região).....	62
Figura 6.1.10 – Primeiro Distrito com Raio R2 e Interseção com a Fronteira (Depósito Fora da Região).....	63
Figura 6.1.11 – Primeiros Distritos com Raio R2 e Interseção com a Fronteira (Depósito Fora da Região).....	63
Figura 6.1.12 – Ajustes dos Distritos Dentro de Um Anel.....	64
Figura 6.1.13 – Fator de Esbeltez de um Distrito .....	66
Figura 6.1.14 – Correção da Esbeltez de Possíveis Distritos Achatados .....	67
Figura 6.1.15 – Final da Distribuição Polar com Alguns Distritos Alongados .....	68
Figura 6.1.16 – Final da Distribuição Polar .....	68
Figura 6.1.17 – Correção da esbeltez.....	69
Figura 6.2.1 – Determinação dos limites das Zonas (Forma Polar e Forma de Voronoi) .....	70
Figura 6.2.2 – Relação entre os vetores $VI$ e $VV$ . ....	81

Figura 7.2.1 – Pontos de Atendimento (6385 Clientes).....	85
FIGURA 7.3.1 – GRÁFICA DE APROXIMAÇÃO DA DENSIDADE DA ÁREA por Splines .....	86
Figura 7.3.2 – Visão parcial da aproximação por Splines em retículas de 200 metros.....	86
Figura 7.4.1 – Fronteira.....	87
Figura 7.4.2 – Anel 1 .....	87
Figura 7.4.3 – Anel 2 .....	87
Figura 7.4.4 – Anel 3 .....	87
Figura 7.4.5 – Anel 4 .....	87
Figura 7.4.6 –Retorno Anel 3 .....	87
Figura 7.4.7 – Anel 3 .....	87
Figura 7.4.8 – Anel 4 .....	87
Figura 7.4.9 – Anel 5 .....	87
Figura 7.4.10 –Retorno Anel 4 .....	88
Figura 7.4.11 – Anel 4.....	88
Figura 7.4.12 – Anel 5.....	88
Figura 7.4.13 – Anel 6.....	88
Figura 7.4.14 –Retorno Anel 5 .....	88
Figura 7.4.15 – Acerto Esbeltez.....	88
Figura 7.4.16 – Diagrama de Voronoi .....	88
Figura 7.4.17 – Densidade nas Zonas .....	88
Figura 7.5.1 – Divisão Polar com a Determinação dos Baricentros .....	89
Figura 7.5.2 – Divisão de Voronoi comparada à divisão polar.....	90
Figura 7.5.3 – Resultados em Cada Distrito: tempo, carga, distância e atendimento .....	91
Figura 7.5.4 – Resultados em Cada Distrito: tempo, carga, distância e atendimento .....	92
Figura 7.6.1 – Divisão Polar com a Determinação dos Baricentros .....	93
Figura 7.6.2 – Divisão de Voronoi comparada à divisão polar.....	94
Figura 7.6.3 – Resultados em Cada Distrito: tempo, carga, distância e atendimento .....	95
Figura 7.6.4 – Resultados em Cada Distrito: tempo, carga, distância e atendimento .....	96
Figura 7.7.1 – Divisão Polar com a Determinação dos Baricentros .....	97
Figura 7.7.2 – Divisão de Voronoi comparada à divisão polar.....	98
Figura 7.7.3 – Resultados em Cada Distrito: tempo, carga, distância e atendimento .....	99
Figura 7.7.4 – Resultados em Cada Distrito: tempo, carga, distância e atendimento .....	100
Figura 8.1 – Um rio que cruza a região de distribuição (exemplo de barreiras).....	103
Figura 8.2 – Um exemplo de modificação de fronteiras considerando uma ponte para transpor o rio .....	103
Figura 9.1.1 – Diagrama Comum de Voronoi.....	110
Figura 9.1.2 – Diagramas Degenerados de Voronoi .....	113
Figura 9.1.3 – Diagramas Limitados de Voronoi.....	113
Figura 9.1.4 – Polígonos de Voronoi obtidos de SEMIPLANOS.....	115
Figura 9.1.5 – Visão espacial do diagrama de Voronoi .....	117
Figura 9.1.6 – Diagrama de Voronoi sobre uma linha .....	117
Figura 9.1.7 – (a) Geradores colineares; (b) geradores cocirculares.....	118
Figura 9.1.8 – Diagrama (pontilhadas) e triangulação (linhas sólidas) de Voronoi.....	119
Figura 9.1.9 – Uma visão espacial de uma tetraedralização de Delaunay .....	123
Figura 9.1.10 – Ilustração para a Propriedade V4 .....	126
Figura 9.1.11 – Ilustração para a Propriedade V7 .....	129
Figura 9.1.12 – O maior círculo vazio cujo centro está dentro da malha convexa de um conjunto de pontos.....	130
Figura 9.1.13 – Reconhecimento dos geradores das fronteiras de Voronoi.....	133
Figura 9.2.1 – Voronoi multiplicativo por peso para $n=2$ .....	137

Figura 9.2.2 – Um diagrama de Voronoi multiplicativo por peso em $\mathbb{R}^2$ .....	137
Figura 9.2.3 – Diagramas MW-Voronoi em $\mathbb{R}$ .....	138
Figura 10.1 – Exemplos de splines de graus 0, 1 e 2. ....	140
Figura 10.2 – Exemplo de spline quadrática interpoladora dos valores marcados com círculos. ....	142
Figura 10.3 – Uma superfície paramétrica criada pelo movimento de uma curva. ....	147
Figura 10.4 – Splines naturais interpoladoras. ....	149
Figura 10.5 – Um retalho bi-cúbico do gráfico da spline interpoladora. ....	151
Figura 10.6 – Superfície paramétrica na forma-produto B-spline. ....	155
Figura 10.7 – Duas malhas de nós para uma mesma massa de pontos. ....	158

## RESUMO

Na área de distribuição de materiais em logística, existe um problema difícil de resolver, que é o atendimento de todos os pontos de uma área de distribuição, no menor tempo e na menor distância possíveis.

O presente trabalho tem como objetivo dividir uma determinada área de distribuição de materiais a fim de obter um conjunto de zonas para cada uma das quais está associado um veículo que percorrerá uma distância a ser aproximada de forma a satisfazer restrições espaciais e temporais, minimizando o custo de operação da frota.

O processo utilizado transforma o espaço contínuo em discreto e mantém ao mesmo tempo a robustez do modelo. Isso é possível, graças à aproximação baseada em uma função contínua para a obtenção das zonas dentro do espaço de distribuição. Para se conseguir a função contínua, é utilizada a aproximação em uma malha que cobre toda a área através de splines de ordem 2.

Utilizando aproximações contínuas sobre a malha, a divisão da área em sub áreas (zonas), inicialmente será obtida de forma seqüencial através de uma distribuição por coordenadas polares. Após a 1<sup>a</sup> divisão, os baricentros de cada distrito são fixados para dar base a ajustes feitos em todas as zonas, com a aplicação do diagrama de Voronoi multiplicativo com pesos. Estes ajustes visam apropriar melhor estes distritos (zonas), modificando suas fronteiras.

Os resultados obtidos com a aplicação do método demonstraram robustez com um custo computacional muito baixo, o que propicia uma utilização continuada possibilitando variações de configurações para se determinar o tipo ou capacidade de veículos mais adequados ao material objeto de distribuição.

## ABSTRACT

A difficult problem to solve in the area of logistics distribution of goods is the one that involves the search for the configuration that minimizes the traveled vehicle distance to delivery points located in a distribution district, and the time necessary to complete the routing service.

The present work has the objective of dividing a distribution region in order to obtain districts to which vehicles will be assigned. Each vehicle will perform a one-to-many delivery route during a working day, starting at the depot and returning to it after the work is completed. Each route must satisfy time restrictions and the overall objective is to minimize total fleet operating cost.

We adopted a computational process that transforms the continuous space into discrete space, maintaining at the same time the robustness of the modeling representation. To do that we fitted continuous functions to point density, delivery time and cargo weight per client. The continuous functions were obtained through a tessellation process covering the whole region and using Splines of order 2.

First, the region was divided into geometrically shaped districts (ring-radial sectors) adopting polar coordinates. The barycenters of each district are then computed and maintained fixed. Then, we applied a multiplicatively weighted Voronoi diagram approach in order to make the necessary adjustments in the districts borders. These adjustments are intended to adjust the district borders in such a way that each vehicle satisfies the time and capacity restrictions.

The results obtained with the application of the model have demonstrated that the methodology is consistent, with low computational times. The methodology can be used in an iterative way to explore different division strategies (number of districts, for instance), and to analyze possible use of different vehicle types in order to get the most appropriate configuration to haul the goods that are object of the distribution effort.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Problema

Um problema muito comum em transporte e logística é determinar qual o sistema de distribuição de produtos em que veículos fazem entregas cobrindo uma determinada região, identificando zonas de distribuição associadas a veículos que percorrem uma distância de forma a satisfazer restrições espaciais e temporais, minimizando o custo total de operação da frota.

## 1.2 Hipótese

Uma aproximação por Spines <sup>1</sup> de ordem 2 (ver Anexo 2) baseada em uma função contínua (Capítulo 4), no espaço de distribuição, permite gerar um modelo computacional robusto para a obtenção de um conjunto de zonas, a cada uma das quais se associará um veículo que percorrerá uma distância satisfazendo restrições espaciais e temporais.

Todo o serviço deverá ser realizado dentro de um tempo de ciclo pré-determinado. Em consequência desta restrição, de acordo com o material transportado, são determinados também tipos de veículos para executar estas ações e, com isso, todo o serviço deverá ser realizado com a limitação de carga relativa à capacidade do caminhão utilizado.

Estas limitações levam à divisão da região em um conjunto de zonas cobertas por veículos associados a equipes de serviço. Para cada veículo é designado um roteiro, incluindo os locais de parada e a sequência em que a equipe deverá atendê-los. Os veículos são despachados a partir de um depósito onde se efetua a triagem da

mercadoria em função das zonas, (NOVAES, 1989).

### 1.3 Objetivo Geral

Considerando-se um sistema de distribuição em que veículos fazem entregas de um depósito central para atender clientes que estão geograficamente dispersos sobre uma determinada região, o objetivo principal será a determinação de um conjunto de distritos (zonas) para cada uma das quais está associado um veículo que percorrerá uma distância a ser aproximada. Definir uma frota e as zonas para uma região de distribuição física de produtos, onde as mercadorias são entregues a partir de um depósito, para  $n$  clientes através de uma frota de veículos homogêneos. A resolução do problema, considerando mais de um depósito e/ou considerando veículos não homogêneos, poderá ser tratada em trabalhos futuros.

### 1.4 Objetivos Específicos

- i. Verificar a possibilidade de transformar o espaço contínuo em discreto mantendo a robustez do modelo;
- ii. Desenvolver uma função contínua de aproximação que determine quantidades características da distribuição;
- iii. Divisão preliminar da região utilizando a distribuição Polar desenvolvida por GRACIOLLI (1998), promovendo alguns melhoramentos no tratamento das fronteiras e no tempo computacional;
- iv. Com base na divisão Polar, redimensionar a região utilizando o diagrama multiplicativo de Voronoi com pesos;

O objetivo deste trabalho é provar que existe a possibilidade de transformar o espaço contínuo em discreto e manter ao mesmo tempo a robustez do modelo. A

---

<sup>1</sup> Aproximação por Spline de ordem 2 significa transformar os dados obtidos de uma região de distribuição em função contínua e diferenciável até ordem 2. Função esta, usada para a aproximação dos valores

proposta de se trabalhar no espaço discreto, e ainda manter resultados precisos, intenciona fazer uma aproximação baseada em uma função contínua para a obtenção das zonas dentro do espaço de distribuição. Para isso será desenvolvida uma função contínua e será utilizada a aproximação por spline de ordem 2 para o uso das funções que aproximam os valores para a distribuição. Esta aproximação poderá ter a precisão que o usuário necessitar. O que se espera é que o modelo seja robusto, confiável e rápido computacionalmente. A divisão da área em sub-áreas (zonas), inicialmente será através de coordenadas polares e através de um ajuste às zonas fazendo-se uso do diagrama multiplicativo de Voronoi com pesos.

### **1.4.1 Função Contínua de Aproximação**

Uma função contínua de aproximação será desenvolvida no capítulo 4 para que esta seja utilizada nas aproximações dos valores de distribuição mostrados no capítulo 5. Funções de aproximação que determinem quantidades características em uma região de distribuição podem ser obtidas de várias formas, uma delas pode ser através de splines (ver Anexo 2) que tomam como dados iniciais coordenadas geográficas de pontos que tenham valores característicos como carga, tempo e outros que se façam necessários para a distribuição.

Com base na função contínua de aproximação por spline, será dimensionado um sistema de distribuição através da forma polar e, depois com base neste, uma distribuição através de Voronoi.

### **1.4.2 Distribuição Polar**

Com base em um depósito central se dá o início da determinação dos distritos, zonas onde cada caminhão irá fazer a distribuição. A construção é estabelecida com relação às coordenadas polares cujo centro polar é o depósito. Cada distrito será limitado entre dois raios  $R1$  e  $R2$ , sendo  $R1$  o limite inferior e  $R2$  o limite

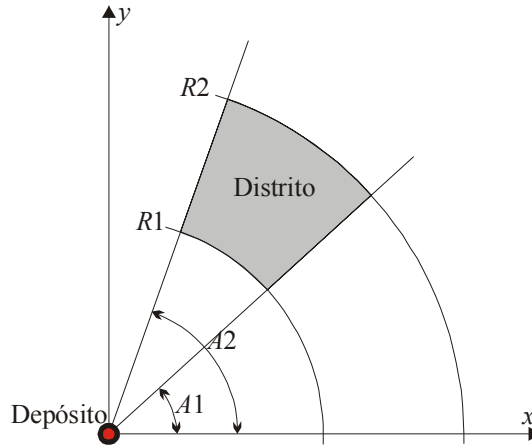
---

de densidade e restrições de tempo e carga em cada zona.



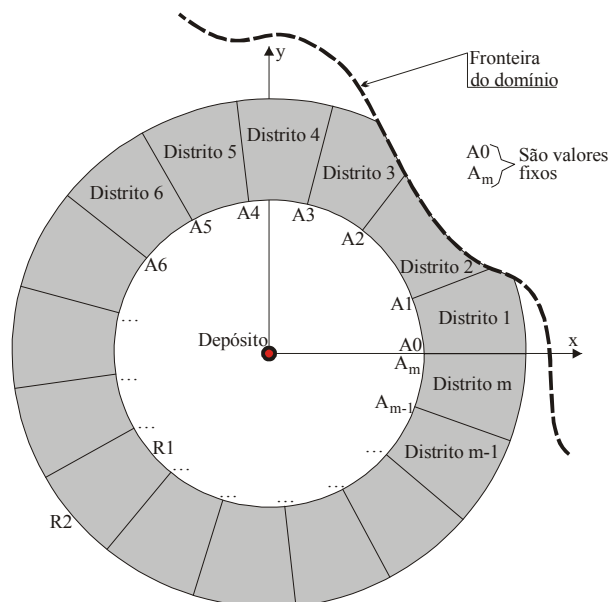
superior e será limitado também entre dois ângulos  $A1$  e  $A2$ , (fig. 1.1) (NOVAES et al., 2000).

FIGURA 1.1 – FORMA POLAR DE DETERMINAÇÃO DOS LIMITES DE UM DISTRITO



Para o início da distribuição, o primeiro distrito é limitado por um raio centrado no depósito, raio este que é variado por iterações até que se cheque primeiro o mais próximo possível de suas restrições. A partir do segundo distrito, anéis são construídos igualando o raio 1 ao raio 2 do anel anterior e projetando o raio 2 de acordo com a área e densidade da região que ainda não foi trabalhada em relação ao ponto mais distante do raio 1. Iterações são feitas no anel obtendo-se as zonas sequencialmente em seus limites de restrições até que, fazendo pequenas alterações no raio 2, a última zona do anel seja equilibrada em relação às outras (fig. 1.2).

FIGURA 1.2 – CONSTRUÇÃO DE UM ANEL



Assim, de forma análoga, com a construção de tantos anéis quantos forem necessários, todo o sistema de distribuição será coberto com a conclusão dessa forma, da distribuição do sistema através de coordenadas polares (fig. 1.3a). Assim, baseado nesta distribuição, dá-se início à próxima fase que é a distribuição através do diagrama multiplicativo de Voronoi com pesos.

### 1.4.3 Distribuição de Voronoi

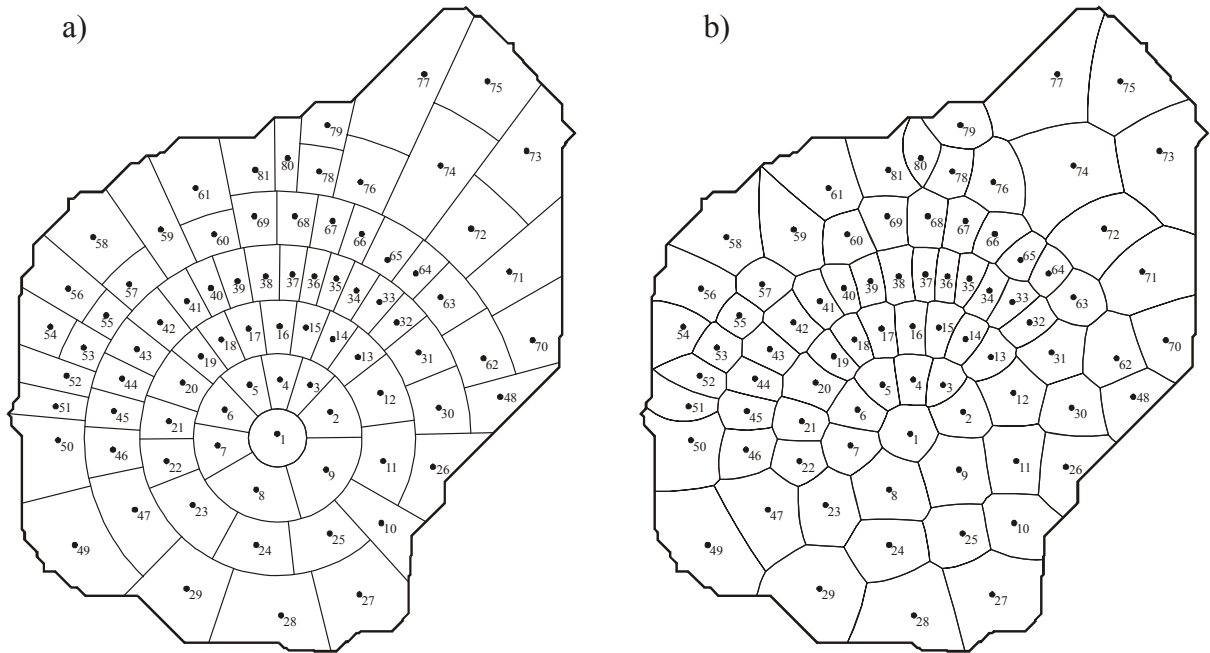
Uma distribuição de Voronoi é baseada em determinação de domínios  $V(p_i)$  de sub-regiões centradas em um ponto  $(p_i)$  sobre outras centradas em  $(p_j)$  através das menores distâncias até estes centros, relações (1.1) e (1.2).

$$V(p_i) = \bigcap_{j=1}^n \text{Dom}(p_i, p_j) \quad (1.1)$$

$$\text{Dom}(p_i, p_j) = \{x / \frac{1}{w_i} \|x - p_i\| \leq \frac{1}{w_j} \|x - p_j\| \} \quad i \neq j. \quad (1.2)$$

Onde  $\text{Dom}(p_i, p_j)$  é a região de domínio de  $p_i$  sobre  $p_j$  através da distância com peso;  $V(p_i)$  é a região de Voronoi por peso associada ao centro  $p_i$ .

FIGURA 1.3 – DETERMINAÇÃO DOS LIMITES DAS ZONAS (FORMA POLAR E FORMA DE VORONOI)



Para o dimensionamento de sistemas utilizado neste trabalho é importante a forma de cada distrito, pois as distâncias são aproximadas levando-se em conta o formato das zonas. Seria interessante, então, procurar um método de distribuição que priorize uma adequação melhor desses distritos, visando, através de uma forma mais adequada, uma aproximação menor das distâncias mantendo-se uma área com densidades semelhantes. Numa tentativa de contemplar esse raciocínio foram fixados, em relação à distribuição polar, os centros de equilíbrio dos distritos, e foi aplicado o diagrama multiplicativo de Voronoi com pesos. Para isso, os pesos iniciais foram considerados como sendo a área de cada zona da distribuição anterior. O equilíbrio do sistema é obtido alterando-se os pesos de Voronoi de tal forma que todas as zonas satisfaçam as restrições temporais e espaciais da distribuição (fig 1.3b). O resultado da aplicação do diagrama de Voronoi trouxe relativa economia em comparação à distribuição polar.

## 1.5 Justificativa

O desenvolvimento da teoria da complexidade computacional tem levado a novos estudos sobre a dificuldade inerente de se resolver um número cada vez maior de problemas. E tem contribuído fornecendo métodos de avaliação de algoritmos e classificação de problemas. Um dos campos de conhecimento mais férteis, onde surgem a cada dia novos problemas, é o campo da otimização combinatória, onde diversos problemas da maior relevância prática podem ser modelados, considerando, principalmente, os problemas de seqüenciamento (*scheduling*), BRUCKER (1998).

Nas últimas duas décadas foi feito um grande investimento na área de otimização combinatória, pois muitos dos problemas desta área são ditos intratáveis, por pertencerem à classe de problemas *NP-completos*. Daí, a justificativa do aumento de interesse pelo uso de métodos heurísticos, métodos estes que formam uma importante área de pesquisa e aplicação. A existência de uma solução ótima não é o principal foco de atenção dos pesquisadores da área. O esforço computacional necessário para encontrar o ótimo é que passa a exercer um papel central no projeto de algoritmos para essa classe de problemas.

Normalmente os modelos de distribuição física de produtos podem ser extremamente complexos ou podem não representar de forma adequada a realidade. Por isso, é importante direcionar pesquisas que amenizem o grau de complexidade de modelos de distribuição, mantendo ao mesmo tempo sua robustez.

Seguindo uma linha de desenvolvimento em relação ao desempenho e à robustez, este trabalho vem corroborar os trabalhos de NOVAES e GRACIOLLI (1999) e NOVAES et al. (2000) que utilizaram a forma polar para uma distribuição em logística. Baseado nestes trabalhos citados, esta tese desenvolve alguns avanços em relação à distribuição polar e acrescenta um melhoramento nas fronteiras polares obtidas, utilizando a distribuição de Voronoi, já mencionada.

## **1.6 Limitações do Trabalho**

A distribuição através do diagrama multiplicativo de Voronoi com pesos desenvolvida neste trabalho pretende dimensionar um sistema de distribuição, porém, com algumas limitações que não foram consideradas neste trabalho.

Estas limitações, que podem ser tratadas em trabalhos futuros e estão mais especificadas no capítulo 8, podem utilizar as técnicas que serão apresentadas nesta tese. As partes não contempladas neste trabalho são: distribuição com múltiplos depósitos; distribuição que utilize uma frota com veículos não homogêneos; distribuição sobre uma área que contenha alguma forma de barreira como rio, lago, grande avenida, parque, dentre outras.

## **1.7 Estrutura do Trabalho**

Este trabalho está dividido em 8 capítulos, incluindo esta introdução.

No capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica em que são apresentados conceitos publicados em trabalhos de outros autores que dão, em sua maior parte, sustentação ao sistema de distribuição que está sendo desenvolvido nesta tese de doutorado.

No capítulo 3 é apresentada a proposta metodológica do trabalho.

No capítulo 4 é desenvolvida uma função contínua de aproximação que é base fundamental para a obtenção de valores essenciais que agilizam a determinação de zonas de distribuição. Na realidade, este trabalho utiliza uma aproximação por splines derivada dessa função, na qual as distribuições adquirem uma suavidade em toda a área de domínio através da aproximação contínua.

No capítulo 5 é apresentado o problema de distribuição física de produtos. Também é mostrada uma forma de aproximação contínua obtida por aplicação de spline sobre a função desenvolvida no capítulo 4. Esta aproximação por splines é utilizada para o desenvolvimento do método utilizado nesta tese.

No capítulo 6 é desenvolvido um método para a resolução do problema de distribuição apresentado no capítulo 5 através da forma polar e, também, baseado nesta, uma distribuição através do diagrama multiplicativo de Voronoi com pesos.

No capítulo 7 são apresentados alguns resultados computacionais com relação aos desenvolvimentos das duas distribuições do capítulo 6.

No capítulo 8 são apresentadas as conclusões e perspectivas para o futuro.

E, finalmente, como anexos, são apresentados assuntos de conhecimento comum que são utilizados na tese, mas que se encontram ali com um detalhamento maior.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Serão apresentados, neste capítulo, alguns dos principais modelos de dimensionamento de sistemas de distribuição física de produtos e que mais freqüentemente são citados na literatura. Um fator importante para se dimensionar um sistema de distribuição física é resolver o problema do caixeiro viajante (PCV), mas por ser um problema de difícil resolução, em muitos casos, e é o que acontece nesta tese, pesquisadores optam por fazer uma boa aproximação dele. Esta e outras abordagens estarão na seqüência.

### 2.1 Percurso do Veículo na Zona de Entrega

Muitas pesquisas já foram feitas para estimar a distância de um roteiro ótimo a ser percorrido por um veículo dentro de uma zona, de forma a visitar todos os clientes e retornar ao depósito. Esse problema é conhecido como problema do caixeiro viajante (PCV). Primeiramente será abordada a aproximação clássica e, em seguida, derivações e abordagens diferentes de vários pesquisadores.

#### 2.1.1 Aproximação da Distância na Zona de Entrega

Na fase de planejamento e dimensionamento de um sistema de distribuição física, o conhecimento do roteiro ótimo ainda não é necessário, sendo desejada tão somente uma boa estimativa da distância percorrida pelo veículo.

Para a métrica Euclidiana, em que a distância  $d$  entre dois pontos, de coordenadas  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$  é calculada por  $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ , foi desenvolvida uma boa aproximação, apresentada na seqüência, para a distância percorrida ao longo de um roteiro otimizado dentro de uma zona de área  $A$ . Sejam considerados  $n$  clientes dispersos aleatória e independentemente sobre uma região de área  $A$ , com a localização de cada cliente determinada por uma distribuição uniforme sobre  $A$ . Na métrica Euclidiana, a estimativa do comprimento da rota ótima ( $L$ ) para o problema do caixeiro viajante que visita todos os  $n$  clientes dentro de uma zona de área

$A$ , foi proposta por BEARDWOOD et al. (1959) como:

$$L = k\sqrt{nA} \quad (2.1.1)$$

onde  $k$  é uma constante.

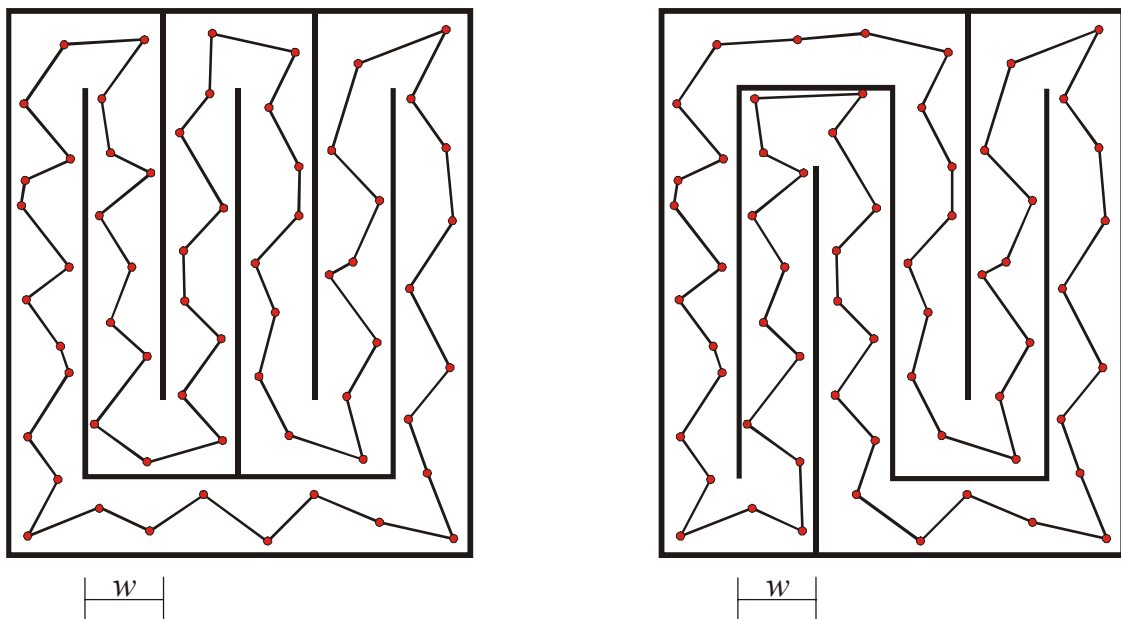
Em um conjunto de simulações experimentais elaborados por EILON et al. (1971) foi estimada a constante  $k = 0,75$ . STEIN (1978) estimou  $k$  como sendo aproximadamente igual a 0,765. Também LARSON et al. (1981) consideraram que, em geral, para zonas razoavelmente compactas e convexas o comprimento esperado da rota ótima pode ser aproximado por:

$$L = 0,765\sqrt{nA} . \quad (2.1.2)$$

Dessa maneira, por exemplo, pode ser estimado o número de pontos que podem ser servidos com recursos disponíveis.

Para  $n \geq 15$  a expressão (2.1.2) apresenta bons resultados em zonas de formas diversas (triângulo, retângulo, círculo, quadrado, etc.), de acordo com simulações realizadas por EILON et al. (1971). Para  $n < 15$ , a aproximação se torna pouco confiável.

FIGURA 2.1.1 – ESTRATÉGIA PROPOSTA POR DAGANZO



A estratégia proposta por DAGANZO (1984a) analisa uma área de serviço

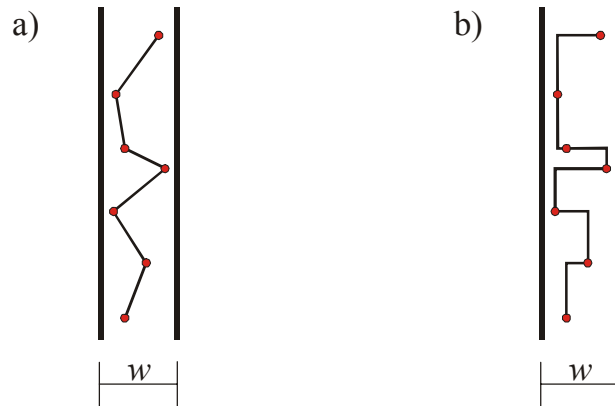
dividida em faixas de largura igual, como mostra a figura 2.1.1. Iniciando a rota pela faixa mais à esquerda no ponto de menor coordenada  $y$ , percorrem-se os pontos na ordem em que eles aparecem ao longo da faixa. Quando atingir o último ponto da faixa muda-se para a faixa seguinte, iniciando-se com o ponto de maior coordenada  $y$  e seguindo-se o mesmo processo, não permitindo retornos na rota. Neste processo contínuo em forma de “zig-zag”, a rota é então determinada percorrendo todas as faixas até o último ponto da área de serviço.

Essa formulação procura tirar partido das características morfológicas da rede viária, principalmente quando há predomínio de artérias em direções bem definidas e quando há um grande número de pontos a serem atendidos por um veículo.

Distancia Euclidiana (fig. 2.1.2a):  $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

Distancia Retangular (fig. 2.1.2b):  $d = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$ .

FIGURA 2.1.2 – DISTÂNCIA EUCLIDIANA E RETANGULAR



Para uma dada densidade de pontos,  $\lambda = n/A$ , DAGANZO (1984a) mostra que o valor esperado da distância  $d_w$ , entre dois pontos consecutivos, nas respectivas métricas (fig. 2.1.2), é dado por:

$$d_w = \frac{w}{3} + \frac{1}{\lambda w} \text{ para a métrica retangular} \quad (2.1.3)$$

$$d_w = \frac{w}{3} + \frac{1}{\lambda w} \phi(\lambda w^2) \text{ para a métrica Euclidiana} \quad (2.1.4)$$

onde  $w$  é a largura da faixa e



$$\phi(x) = (2/x^2)[(1+x)\log(1+x) - x]. \quad (2.1.5)$$

A largura  $w^*$  que leva ao valor mínimo de  $d_w$  é dada por

$$w^* = \sqrt{a/\lambda} \quad (2.1.6)$$

onde  $a = 3$  para a métrica retangular e  $a = 1,15$  para a métrica Euclidiana.

Adotando a melhor largura  $w^*$ , a distância esperada entre pontos é dada por

$$d^* = \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.1.7)$$

onde  $k = 1,15$  para a métrica retangular e  $k = 0,9$  para a métrica Euclidiana.

Resulta, então, a seguinte expressão para o valor esperado do comprimento da rota dentro da zona de serviço:

$$L \cong \frac{k}{\sqrt{n\lambda}} \quad (2.1.8)$$

onde  $k = 1,15$  para a métrica retangular e  $k = 0,9$  para a métrica Euclidiana.

Se compararmos o segundo valor ( $k = 0,9$ ) com o resultado obtido por Stein para o caso mais geral (isto é,  $k = 0,765$ ) nota-se um acréscimo de 17,6% na distância percorrida. Esta diferença se dá visto que  $k = 0,9$  é resultado da obtenção do percurso por faixas. Se, no entanto, for tirada vantagem da conformação viária, nos casos em que isso for possível, o método de percurso por faixas pode dar resultados satisfatórios, além de permitir que se faça a programação do roteiro do veículo com maior facilidade.

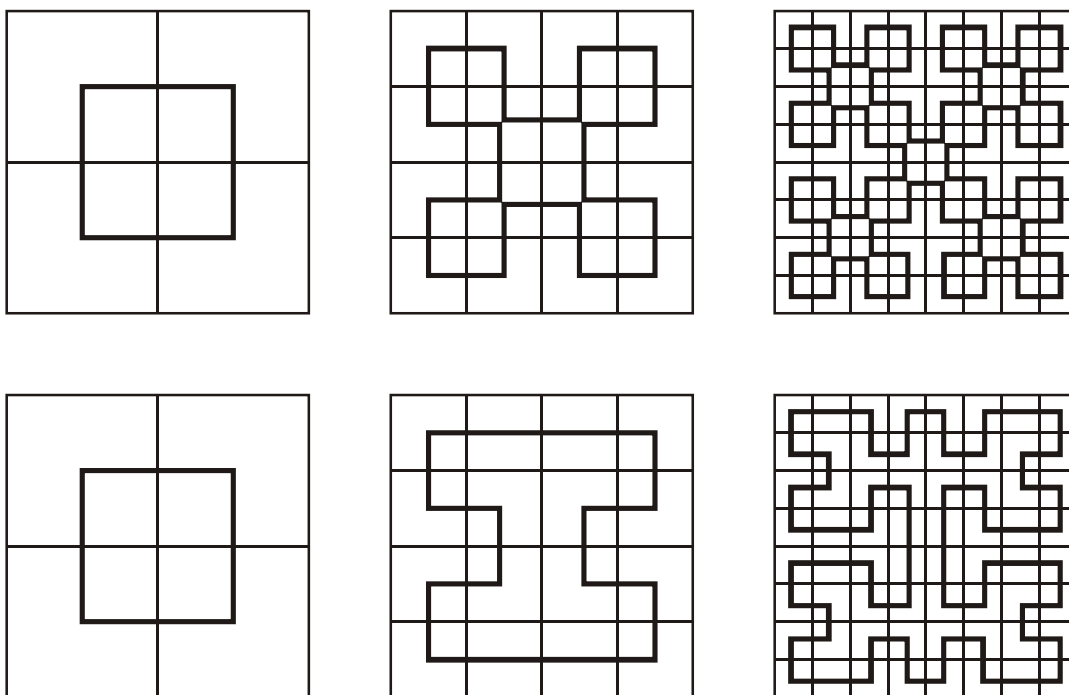
Zonas com dimensões grandes comparadas com  $w^*$  podem ser cobertas pela faixa de largura  $\cong w^*$  em mais de uma maneira. Portanto, pelo menos conceitualmente, seria possível escolher o melhor padrão de faixa que sirva a arranjos particulares de pontos, talvez até mesmo variando sua largura dependendo da densidade de pontos no local. Isto reduziria o comprimento da rota resultante (ROBUSTÉ et al., 1990). Além disso, o comprimento da rota pode também ser reduzida se for permitido retorno, cruzamento de limites de faixa e reversão de direção. NEWELL et al. (1986) estimam

que essa redução na distância poderia chegar em torno de 15% para rotas típicas.

BARTHOLDI et al. (1988) propuseram uma estratégia baseada em curvas de Peano (*spacefilling curves*), que produzem uma solução aproximada muito rapidamente para o PCV, e que pode ser usada como uma boa solução inicial para uma heurística mais precisa, mas que consome muito tempo para obtenção de uma solução inicial.

Curvas de Peano, descritas principalmente pelos matemáticos Peano e Hilbert, são mapeamentos contínuos de uma unidade de intervalo sobre um quadrado unitário. A seqüência de construções recursivas (fig. 2.1.3) produz curvas contínuas que podem ser convertidas em um segmento de reta através de um processo de alongamento.

FIGURA 2.1.3 – TIPOS DE CURVAS DE PEANO RECURSIVAS

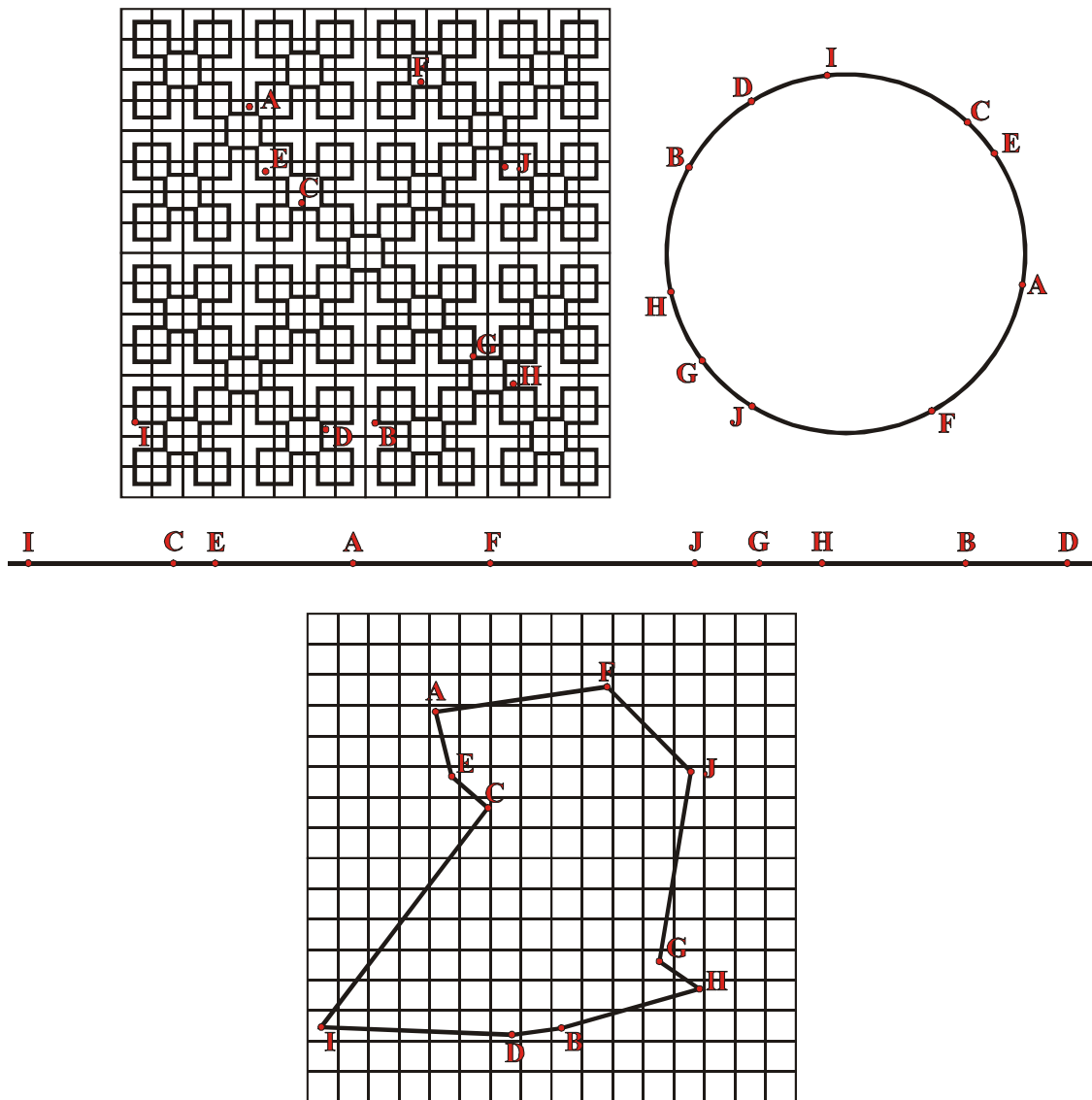


Para cada um dos  $n$  pontos dentro do quadrado é tomado o ponto mais próximo do mesmo na curva. Um procedimento de seleção simples sobre o segmento linear obtido pelo alongamento da curva produzirá uma seqüência de pontos da rota aproximada para PCV (fig. 2.1.4). O número de curvas recursivas a ser considerado dependerá do grau de precisão desejado.

NOVAES (1992) aborda o problema de distribuição para áreas de alta

densidade de maneira diferente. Suponha uma região urbana com ruas formando uma grade quadrada com espaçamento  $a$  (fig. 2.1.5). Suponha também que um serviço de distribuição sobre uma zona de área  $A$  tenha um grande número de pontos de visita  $n$ , aleatoriamente distribuídos sobre a rede. Se  $n$  é suficientemente grande, no caso limite, o veículo que serve a zona cobrirá todas as arestas. Portanto, o problema de roteamento pode ser tratado como um problema do carteiro chinês (PCC), para  $n \rightarrow \infty$ .

FIGURA 2.1.4 – ROTA OBTIDA PELA ESTRATÉGIA DE CURVAS DE PEANO



Supondo-se que a zona de serviço seja uma grade de forma retangular, forma-se uma malha de espaçamento  $a$  (fig. 2.1.5). Os lados do retângulo são  $l=n'a=ma$ , onde  $n'$  e  $m$  são inteiros positivos e os  $n$  pontos de visita são distribuídos

aleatoriamente e uniformemente sobre os arcos da rede.

Suponha ainda que o veículo tem que cobrir todas as arestas da rede. Então, este é o problema do carteiro chinês clássico. Sua solução é facilmente obtida para a grade retangular (fig. 2.1.5). Portanto, deve ser determinada a rota de Euler de comprimento mínimo (rota de comprimento mínimo que passa por todas as arestas uma e somente uma vez), que existe se e somente se o grafo correspondente não possuir vértice de grau ímpar, (LARSON et al., 1981). Observando a grade (fig. 2.1.5), nota-se que os vértices de grau ímpar ocorrem somente no perímetro externo do retângulo. Os comprimentos mínimos dos pares de vértices ímpares são imediatamente identificáveis, levando às arestas suplementares que são necessárias para obter a rota de Euler.

FIGURA 2.1.5 – ZONA DE SERVIÇO (GRADE)

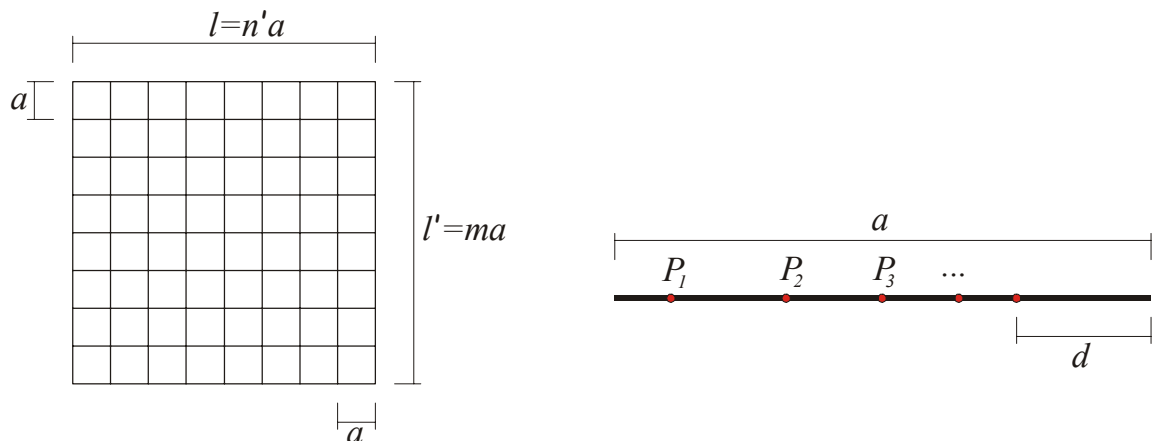
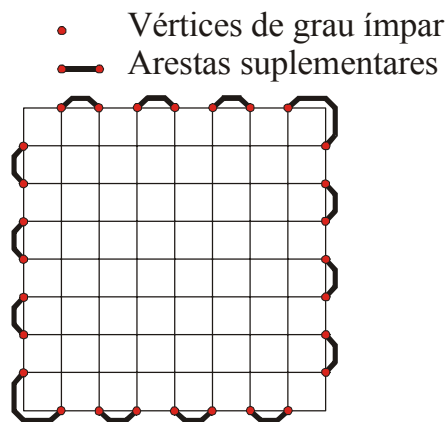


FIGURA 2.1.6 – GRADE COM ARESTAS ADICIONAIS QUE PERMITE UMA ROTA DE EULER



Assumindo que  $n'$  e  $m$  são pares (ou  $n'$  par e  $m$  ímpar, ou vice-versa) a figura (fig. 2.1.6) mostra como adicionar as arestas suplementares de maneira a eliminar os

vértices de grau ímpar, a necessária e suficiente condição para obter uma rota de Euler. A extensão total das arestas da grade (fig. 2.1.5) é dada por:

$$L_{PCC} = 2[A/a + (1+\beta)(A/\beta)^{1/2}] \quad (2.1.9)$$

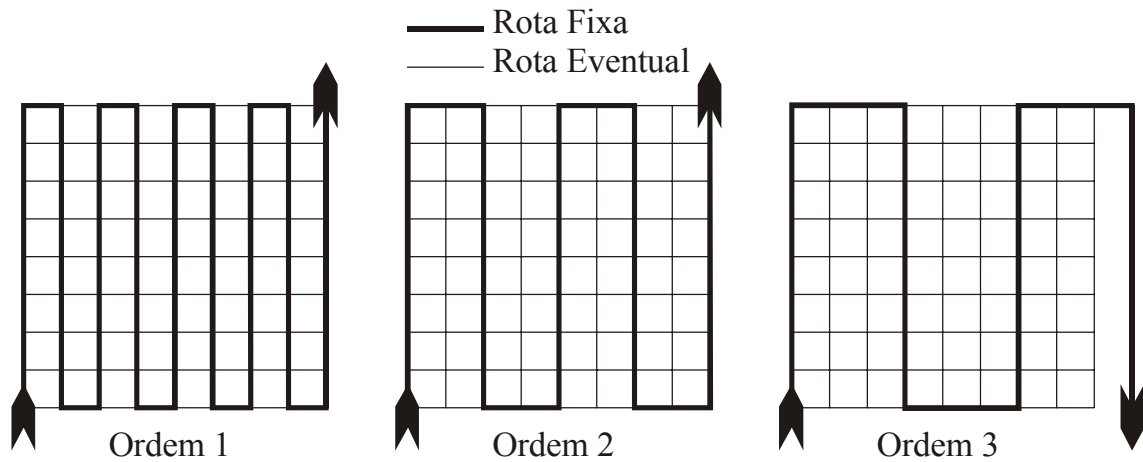
onde  $\beta = l'/l = m/n'$ .

A estratégia de varredura do veículo segue uma rota em zig-zag (fig. 2.1.7). As ruas transversais são percorridas somente se um ou mais pontos são alocados na aresta. A distância total esperada para a estratégia de ordem 1 é:

$$L_A = A/a + (1+\beta)(A/\beta)^{1/2} + (A/a^2)z \quad (2.1.10)$$

onde  $z = 2(a - E[d])$ .

FIGURA 2.1.7 – ESTRATÉGIAS DE VARREDURA SOBRE A ZONA DE SERVIÇO



Comparando os resultados da melhor estratégia de varredura, dada pela equação (2.1.10), com a solução esperada para o PCV dado pela equação (2.1.8), NOVAES (1992) determina o ponto onde ambas as curvas se interceptam. Uma vez que a heurística para resolver o PCV envolve erros não desprezíveis, foi introduzido um coeficiente  $\alpha$  na relação (2.1.8) para considerar o fato de que o comprimento da rota PCV, dessa forma obtida, é maior que o ótimo real.

$$L_{PCV} = k\alpha\sqrt{nA}, \text{ com } \alpha > 1 \quad (2.1.11)$$

Por exemplo, assumindo  $s = 4km^2$ ,  $\beta = 1$ ,  $a = 0,2km$  e  $\alpha = 1,05$ , foi determinado que para  $n > 667$  pontos ( $\lambda = 167$  pontos/ $km^2$ ) a estratégia da varredura

com  $c = 1$  (ordem 1), produz melhores resultados que a abordagem PCV convencional (NOVAES, 1992). Portanto considerando uma grade com alta densidade de pontos de serviço, outras estratégias de roteirização, que não a PCV, podem produzir resultados satisfatórios com muito menos esforço computacional.

DAGANZO (1984b) desenvolveu uma formulação que pode ser usada para estimar o comprimento da rota ótima do PCV através de  $n$  pontos para o problema de roteirização de veículos (PRV). Ele considera a distância total como dois segmentos: a distância percorrida do depósito até a zona de entrega mais o retorno ao depósito,  $2D$ , mais o comprimento da rota que visita todos os pontos na zona, expressão (2.1.1) com  $k = 0,75$ .

$$L_C \cong 2D + 0,75 \sqrt{nA} \quad (2.1.12)$$

CHIEN (1992) testa a exatidão de 7 modelos diferentes para estimar  $L_C$ . Ele usou 16 formas diferentes para a região de serviço (incluindo as formas: retangular e cunha) e localizou o depósito na origem. Ele gerou aleatoriamente 4160 problemas-teste variando o número de clientes de 5 a 30 (embora discuta brevemente resultados em 4 problemas contendo 100 a 250 pontos). Usando o conjunto de dados completo, Chien então determinou, usando busca exaustiva, o coeficiente para cada um dos 7 modelos que minimiza a média total da porcentagem de erro absoluto. Por exemplo, usando todos os 4160 problemas-teste, ele achou  $k = 0,88$  em (2.1.8), produzindo seu modelo  $L_C = 0,88(nA)^{1/2}$ .

Sendo  $D$  a média da distância dos clientes ao depósito,  $R$  a área do menor retângulo que cobre somente clientes e  $n$  o número de clientes mais o depósito, Chien determinou o seguinte modelo para o conjunto total de dados:

$$L_C = 2,1D + 0,67 \sqrt{R(n-1)}. \quad (2.1.13)$$

Este autor ainda desenvolveu 7 modelos para cada uma das 16 diferentes regiões e examinou com exatidão cada modelo. Cada uma das regiões contém 260 problemas teste e os coeficientes em cada modelo variam de acordo com a forma da região. Por exemplo, na região retangular onde o comprimento do retângulo dividido

pela largura é igual a 1, a equação (2.1.13) resulta na seguinte expressão:

$$L_C = 2,39D + 0,57\sqrt{R(n-1)}. \quad (2.1.14)$$

## 2.1.2 Correções Devido à Rede Viária

A rede viária, tanto em nível urbano como em nível regional, incorpora ainda acréscimos na distância percorrida em função da sinuosidade das ruas e estradas, desvios etc. No contexto urbano aparecem ainda os efeitos de vias de mão única, restrições de cruzamento de ruas preferenciais etc., obrigando os veículos a realizarem percursos relativamente maiores do que os teóricos. Na literatura é comum que os autores adotem um crescimento de 35% na distância Euclidiana, para levar em conta tais fatores. Esse valor reflete um grande número de observações, envolvendo pares de pontos situados a distâncias variadas entre si. Nos casos de roteiros realizados em zonas de grande densidade de pontos, esse valor tende a ser maior, porque os efeitos mencionados (ruas com mão única etc.) tendem a uma penalização maior das distâncias mais curtas. Antes de se adotar um valor para esse coeficiente de correção, em geral, é necessário analisar a rede específica e ajustar um valor através de técnicas estatísticas (regressão, por exemplo).

Segundo LARSON et al. (1981), de uma forma geral, o percurso dentro de uma região de área  $A$ , razoavelmente compacta e convexa, correspondente a um roteiro otimizado via solução do PCV, com  $n$  pontos distribuídos aleatoriamente na região, pode ser aproximado através da expressão:

$$L = k'k\sqrt{nA} \quad (2.1.15)$$

com  $k = 0,765$ , e  $k'$  obtido através de ajuste estatístico, correlacionando distâncias efetivas com as respectivas distâncias Euclidianas.

Uma outra forma utilizada para expressar esse resultado é através da densidade de pontos  $\lambda$  (quantidade de ponto por  $km^2$ ). Tem-se  $\lambda = n/A$ , e portanto  $A = n/\lambda$ . Substituindo em (2.1.15), vem:

$$L = \frac{k'kn}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.1.16)$$

Um outro parâmetro muito utilizado nas análises é o percurso médio por ponto, que é igual à distância  $L$  dividida pelo número de pontos:

$$d = L/n = \frac{k'k}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.1.17)$$

Em resumo, todos os autores comentados anteriormente, expressões (2.1.1), (2.1.8), (2.1.11) e (2.1.15), acabam chegando, de uma forma ou de outra, na seguinte formulação para a determinação da distância esperada percorrida pelo veículo dentro da zona de serviço:

$$L = k\sqrt{An}. \quad (2.1.18)$$

Com a variação do coeficiente  $k$  dependendo das características consideradas nas simulações realizadas pelos pesquisadores.

Até agora foram dadas formulações para se estimar a distância a ser percorrida por um veículo no roteiro próximo do ótimo que visite todos os clientes de uma zona. A seguir serão dadas formulações para se criar um sistema de distribuição física, formado por várias zonas de entrega ou coleta.

## 2.2 Problema Clássico de Distribuição Física de Produtos

Os problemas de coleta e distribuição são conceitualmente análogos, na maioria dos casos. Podem ser analisados de forma conjunta, fazendo-se as correções específicas no momento das aplicações.

As características básicas desse tipo de problema são as seguintes (NOVAES, 1989):

- i. Uma região geográfica é dividida em zonas, cujos contornos podem ser rígidos ou, em alguns casos, podem sofrer alterações momentâneas para acomodar diferenças de demanda em regiões contíguas.



- ii. É alocado um veículo para cada zona com uma equipe de serviço, podendo ocorrer outras situações (mais de um veículo por zona, por exemplo).
- iii. A cada veículo é designado um roteiro, incluindo os locais de parada (pontos de coleta ou entrega, atendimento de serviço etc.) e a sequência em que a equipe deverá atendê-los.
- iv. O serviço deverá ser realizado dentro de um tempo de ciclo pré-determinado. No caso de coleta/entrega urbana, o roteiro típico inicia de manhã cedo e se encerra no fim do dia. Nas entregas regionais o ciclo pode ser maior. Há casos de entrega rápida em que o ciclo é menor que um dia útil.
- v. Os veículos são despachados a partir de um depósito onde se efetua a triagem da mercadoria (ou serviço) em função das zonas. Nos casos em que há mais de um depósito o problema pode ser analisado de forma análoga, efetuando-se, para isso, as divisões adequadas da demanda e/ou da área geográfica atendida.

Algumas questões metodológicas se colocam ao planejador do sistema, com os seguintes destaques:

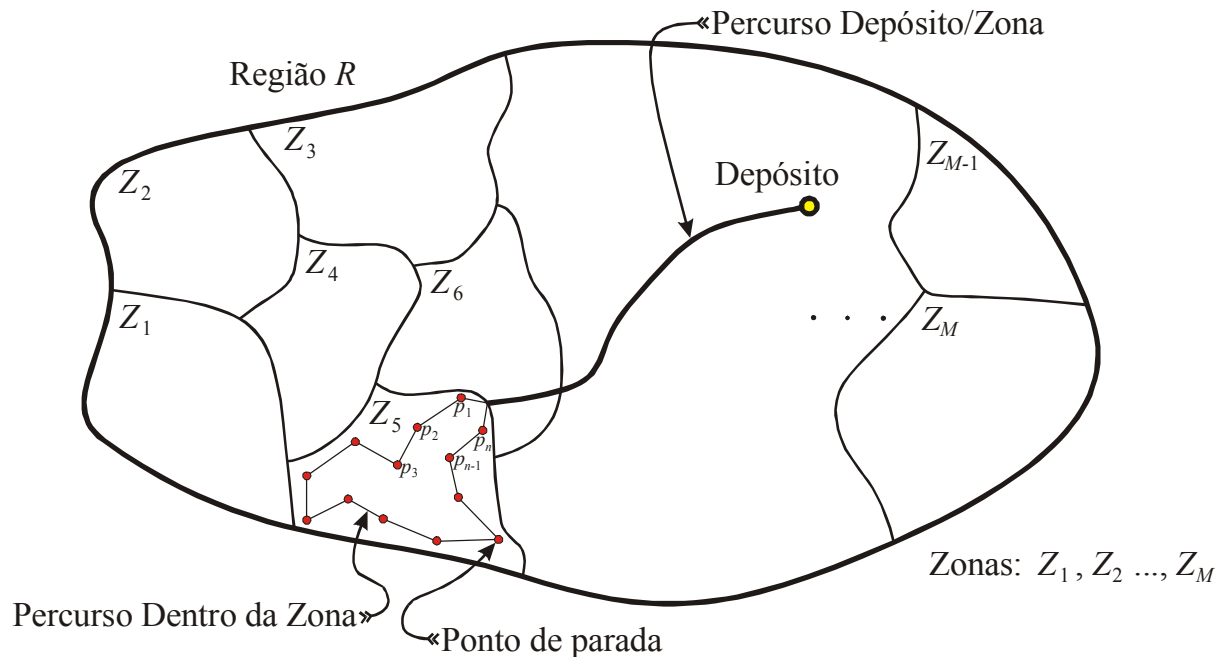
- i. Como dividir a região de atendimento em zonas de serviço?
- ii. Como selecionar o veículo/equipe mais adequado ao serviço?
- iii. Qual a quilometragem média da frota e os diversos tempos associados ao serviço, de forma a quantificar os custos?
- iv. Qual a fração do serviço (carga coletada ou distribuída, número de chamadas etc) não cumpridas num dia útil?
- v. Qual a frequência ideal de serviço?
- vi. Como, enfim, selecionar a configuração mais adequada?

Esse tipo de problema apresenta dois níveis de resolução. Na fase de planejamento e projeto do sistema de coleta/distribuição ainda não se tem idéia precisa dos pontos reais de atendimento. Nesse caso é mais interessante adotar estimativas aproximadas, mas de cálculo rápido, de forma a possibilitar a análise de diversas configurações alternativas.

Na fase de operação, são conhecidos os locais de atendimento. Em alguns casos esses pontos são fixos, como, por exemplo, na distribuição diária de jornais, na entrega de produtos nos estabelecimentos varejistas etc. Noutros casos os locais de atendimento são aleatórios, sendo conhecidos somente na hora de executar o roteiro de serviços. Como exemplo, citamos os serviços de entrega de compras para as lojas, os sistemas de atendimento para reparos e consertos etc. Nessas situações, são necessárias definições de um roteiro otimizado para a equipe de serviço.

A seguir (fig. 2.2.1), pode-se observar o esquema espacial de um sistema típico de coleta e distribuição de mercadorias. Uma região  $R$ , atendida pelo sistema, é dividida em  $M$  zonas. A cada zona é alocado um veículo de coleta/distribuição.

FIGURA 2.2.1 – ESQUEMA GERAL DE UM SISTEMA DE COLETA/DISTRIBUIÇÃO



O veículo, ao ser liberado no depósito, sai carregado com a mercadoria a ser entregue e o roteiro das visitas, com indicação da ordem de seqüência das paradas.

O veículo percorre uma rota desde o depósito até o primeiro ponto de parada (ponto  $p_1$ , fig. 2.2.1). Definindo como  $t$  o tempo decorrido nesse percurso (variável aleatória) e admitindo que, no regresso ao depósito, o tempo seja também igual a  $t$ . A distância percorrida nesse percurso é denominada por  $D$ .

Na zona de entrega o veículo gasta um tempo  $T_p$  em cada parada, tempo esse necessário para estacionar, procurar a pessoa responsável no endereço, efetuar a

descarga, providenciar a assinatura na nota etc.

O tempo total do ciclo, medido desde que o veículo sai do depósito até seu retorno no final do serviço, é dado pela seguinte expressão.

$$T_C = t + T_p^* + T_\tau^* + t \quad (2.2.1)$$

Na expressão (2.2.1), têm-se as seguintes representações:

$T_C \rightarrow$  tempo do ciclo.

$t \rightarrow$  tempo de percurso entre depósito e zona de distribuição ou vice-versa. Os tempos de ida e de volta estão separados porque, em termos estatísticos, são valores independentes, embora regidos pela mesma distribuição.

$T_p^* \rightarrow$  soma dos tempos de parada dentro da zona de distribuição.

$T_\tau^* \rightarrow$  soma dos tempos de percurso entre paradas sucessivas.

Equivalentemente, a distância percorrida por um veículo, num ciclo  $T_C$ , é dada pela seguinte expressão.

$$L_C = D + L + D \quad (2.2.2)$$

Na expressão (2.2.2), têm-se as seguintes representações:

$L_C \rightarrow$  distância total do ciclo.

$D \rightarrow$  distância do depósito à zona de distribuição e vice-versa.

$L \rightarrow$  soma das distâncias percorridas entre paradas sucessivas dentro da zona.

## 2.2.1 Custos

O custo operacional básico de uma frota de veículos de entrega é dado pela seguinte fórmula (GRACIOLLI, 1998).

$$C_T = C_F M_Z + C_{EX} H_{EX} + C_{KM} K_{MF} \quad (2.2.3)$$

Na expressão (2.2.3), têm-se as seguintes representações:

$C_T \rightarrow$  custo total.

$C_F \rightarrow$  custo fixo diário de um veículo (\$/dia/veículo).

$M_Z \rightarrow$  número total de zonas = número de veículos ( $M_Z = \sum M_i$ ).

$C_{EX} \rightarrow$  custo da hora-extra.

$H_{EX} \rightarrow$  total de horas-extras da frota, por dia.

$C_{KM} \rightarrow$  custo variável (\$/km).

$K_{MF} \rightarrow$  distância média diária da frota (km).

O custo operacional por parada pode ser calculado considerando separadamente o custo fixo e o custo variável (quilométrico), o primeiro dado em valor monetário/dia/veículo ( $C_F$ ) e, o segundo, em valor monetário por quilômetro rodado ( $C_{KM}$ ).

Cada veículo realiza  $m$  roteiro por semana, rodando então  $mL_C$  quilômetros semanais. A quilometragem semanal da frota será então  $n_v mL_C$  (onde  $n_v$  é o número de veículos). O custo médio por parada é dado pela seguinte fórmula.

$$C_{\text{médio}} = [n_v(C_F + C_{KM}mL_C)]/(\lambda A) \quad (2.2.4)$$

HIGGINSON (1993) apresenta uma discussão sobre conceito de custo total nos custos da distribuição física. Esta visão declara que todos os custos do sistema logístico estão interligados e qualquer análise deve examinar o efeito em todos os custos em vez de somente em alguns. Modelos na literatura de distribuição, entretanto, tipicamente têm focalizado em uma atividade, tal como roteamento de veículo, localização de facilidades ou planejamento de cargas, e têm ignorado o impacto da análise em outras atividades do sistema de distribuição. Além disso, modelos têm quase que exclusivamente abordado os custos diretos (aqueles que podem ser facilmente traçados para um despacho ou pedido) e têm omitido aqueles que são menos visíveis. Portanto, enquanto o conceito de custo total tem sido reconhecido por muitos anos, ele não tem recebido adequada aplicação por modelos teóricos.

Expressões para o custo total de um sistema logístico têm sido propostas por vários autores, e abordagens práticas para custeio de despacho têm sido desenvolvidas. Enquanto estes modelos diferem em detalhes em que certas atividades são consideradas, os custos incluídos podem ser classificados como aqueles relacionados ao transporte, estoque em trânsito, manuseio, armazenagem e atividades indiretas (por

exemplo, processamento de pedidos e marketing).

### 2.2.2 Zoneamento

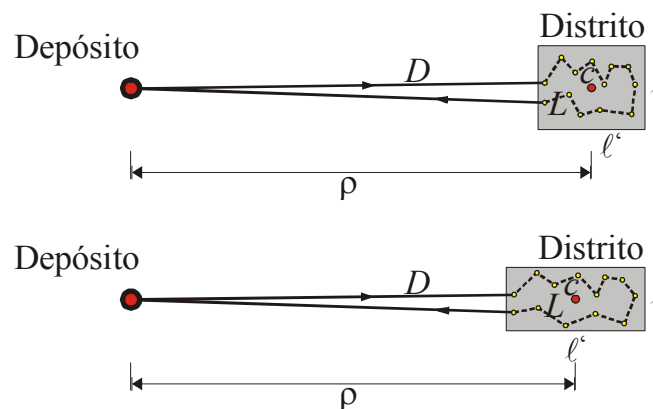
Segundo GONÇALVES (1999), a distribuição física de produtos numa determinada região implica geralmente na subdivisão da mesma em zonas, às quais se alocam os veículos de coleta/entrega. A situação mais freqüente é a da alocação de um veículo a cada zona.

A subdivisão da região em zonas depende de uma série de fatores, destacando-se: (a) distância da zona ao depósito ou armazém; (b) densidade de pontos de parada por  $km^2$ ; (c) condições viárias e de tráfego; (d) tipo e capacidade dos veículos.

A determinação precisa dos contornos das zonas de distribuição constitui um problema relativamente complexo porque envolve conceitos topológicos, operacionais, urbanísticos e viários. Na prática, os serviços logísticos de distribuição física de produtos têm as zonas dimensionadas e delimitadas através de sistemáticas empíricas, baseadas na experiência contínua, no próprio processo operacional.

DAGANZO (1984b) apresenta formulações para zoneamento, dividindo uma área em zonas, objetivando a minimização da distância média percorrida por ponto de parada. Considerando a distância como a soma de duas componentes: a distância do depósito até a zona, denotada por  $D$ , e a distância percorrida no interior da zona, dada por  $L$  (fig. 2.2.2).

FIGURA 2.2.2 – ALONGAMENTO DA ZONA EM DIREÇÃO AO DEPÓSITO



A distância total percorrida,  $L_C = 2D + L$ , depende do número de pontos de parada, da forma geométrica das zonas, da área da zona e da localização do depósito.

Para cada zona há  $C$  pontos de paradas (cada zona está associada a um único veículo), a área de cada zona é pequena comparada com a área total da região, a densidade de pontos de parada na zona,  $\lambda$  é constante (podendo variar para a região), então a área de uma zona pode ser determinada como se segue.

$$A_Z \cong C/\lambda \quad (2.2.5)$$

DAGANZO (1984b) mostra que pequenas variações nas formas das zonas não afetam significativamente o comprimento de roteiros sub ótimos.

Para zonas de forma retangular com a distância  $D$  grande, convém alongar as zonas na direção do depósito (fig. 2.2.2).

Para determinar o quanto a zona deve ser alongada em direção ao depósito são necessárias algumas considerações.

A distância esperada entre pontos de paradas de um roteiro numa zona de forma retangular de lados  $\ell$  e  $\ell'$ ,  $\ell \leq \ell'$  é:

$$d^* = \frac{\phi(\lambda \ell^2)}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.2.6)$$

onde  $\phi(x)$  é contínuo e não crescente ( $x = \lambda \ell^2$ ) dado por:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{se } x \geq 12 \\ \frac{\sqrt{x}}{6} + \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{2}{(x/4)^2} \right) \left[ \left( 1 + \frac{x}{4} \right) \log \left( 1 + \frac{x}{4} \right) - \frac{x}{4} \right] & \text{se } x < 12 \end{cases}.$$

Se o retângulo está orientado com o lado mais comprido,  $\ell'$ , na direção do depósito, a distância média por ponto,  $\tilde{d}$ , incluindo a distância percorrida do depósito até a zona é:

$$\tilde{d} = \begin{cases} \frac{2}{C} \left( \rho - \frac{\ell'}{2} \right) + d^* & \text{se } \rho \geq \frac{\ell'}{2} \\ d^* & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Uma vez que a área da zona,  $A_Z = C/\lambda$ , é constante e conhecida e,  $\ell\ell'$  também constante, conclui-se que: (a) quando  $\ell$  aumenta e  $\phi$  diminui então  $d^*$  diminui ( $d^*$  dado pela relação 2.1.7); (b) quando  $\ell$  aumenta e  $\ell'$  diminui então  $(\rho - \ell'/2)$  aumenta.

Portanto, é possível determinar um coeficiente de esbeltez,  $\beta = \ell/\ell'$ , que minimiza  $\tilde{d}$ .

Para  $\rho$  grande o coeficiente de esbeltez  $\beta$  pode ser representado por um outro  $\beta^*$  dado através de:

$$\beta^* = \min \left\{ 1; \frac{6,7}{C} \right\}. \quad (2.2.7)$$

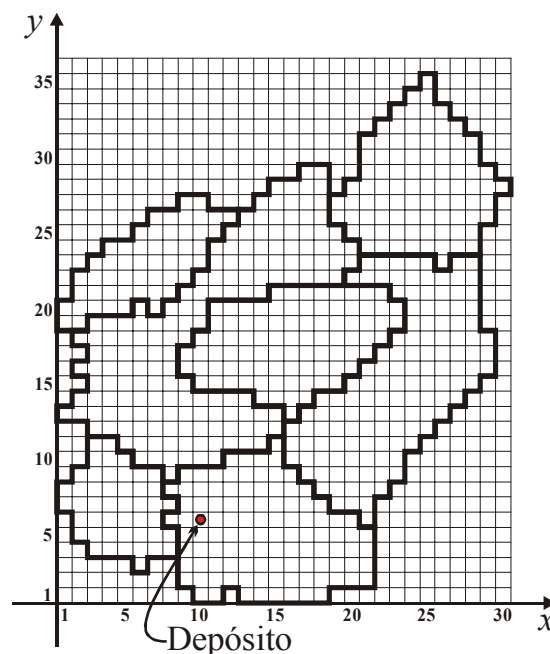
NEWELL et al. (1986) analisaram o problema de se determinar em as dimensões ótimas das zonas (admitidas retangulares), considerando uma estratégia de roteirização diferente do PCV. Essa estratégia, somente válida para altas densidades de pontos, pressupõe a divisão da região a ser atendida em faixas de largura constante, formando um *zig-zag* ao longo de uma direção principal (mais detalhes, ver Aproximação da Distância na Zona de Entrega). À distância dos roteiros próximos dos ótimos, obtida por esse método é um pouco superiores à obtida através de outros métodos para o PCV, mas a estratégia é de fácil implementação na prática, sobretudo quando os roteiros envolvem um numero grande de pontos. NEWELL et al. (1986) aplicaram sua metodologia a uma região circular, com depósito situado no centro, e com uma rede formada por vias radiais e circulares.

LANGEVIN et al. (1989) estenderam a formulação de NEWELL et al. (1986), considerando restrições de tempo, mas admitindo a mesma formação inicial (região circular, com rede radial anelar).

NOVAES (1991), apresenta um desenvolvimento metodológico diferente das

propostas anteriores, que possibilita a incorporação de características importantes na solução de problemas reais. Por exemplo, a região analisada pode ter qualquer forma, o depósito pode estar localizado em qualquer ponto da região, a densidade pode variar ponto a ponto, de forma não uniforme. A metodologia representa a região de distribuição de forma reticulada, dividindo a região em quadrículas elementares (abordagem com tratamento discreto da região) (fig. 2.2.3). Para cada quadrícula são determinadas as coordenadas e a densidade de pontos e, juntamente com um esforço de produção dos veículos, é determinada a divisão da região em zonas de distribuição aproximadamente ótimas.

FIGURA 2.2.3 – REPRESENTAÇÃO RETICULADA DE UMA REGIÃO DE DISTRIBUIÇÃO



Esta metodologia auxilia a tarefa de zoneamento no processo de distribuição física de produtos, possibilitando, ao analista, uma pré-seleção de configurações consistentes entre si e obedecendo a critérios objetivos e claros.

### 2.2.3 Estratégias Operacionais

HALL (1985) apresenta um problema que envolve a coleta de mercadorias (matéria-prima) de várias origens (fornecedores) para um único destino (fábrica). Pesquisas mostram métodos que otimizam a frequência desses despachos dos veículos



de coleta e assumem que todos os fornecedores são visitados em cada despacho. Nesse trabalho, o autor apresenta um método que determina a frequência de despacho ótima no qual grandes clientes são visitados mais frequentemente do que pequenos clientes. Este método permite combinar custos de estoque e custos de transporte de serviços de coleta objetivando a redução destes custos. Para um dado tamanho de carga a ser coletada de várias origens, para ser entregue num único destino, uma rota de coleta pode ter muitos pontos de parada com tempo pequeno entre despachos, ou, para poucos pontos de parada, um tempo maior entre despachos. No primeiro caso, o custo de transporte é alto e o custo de estoque é baixo. No segundo caso, o custo de transporte é baixo e o custo de estoque é alto.

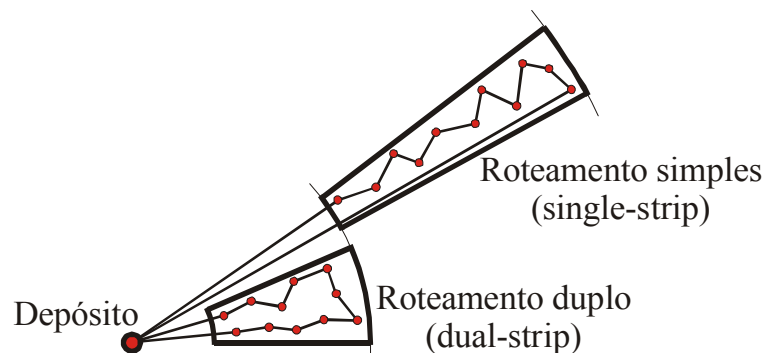
BURNS et al. (1985) apresentam estratégias para a distribuição que minimizem custos de estoque e custos de transporte, isto é, determinam o *trade-off* ótimo entre esses custos. São analisadas duas estratégias de distribuição: despacho direto (despacho com uma carga separada para cada cliente) e *peddling* (despacho de caminhões que entregam itens para mais de um cliente por carga). O custo em cada estratégia depende do tamanho do despacho. Os resultados indicam que, para despacho direto, o tamanho do despacho ótimo é dado pelo modelo econômico em relação à quantidade de pedido (*economic order quantity*, EOQ) enquanto que em despachos para vários clientes na mesma carga (*peddling*), o tamanho do despacho ótimo é o caminhão com lotação completa. O custo para despacho com entrega para mais de um cliente por carga depende também do número de clientes incluídos na rota. O enfoque desse trabalho está na abordagem analítica para resolver problemas de distribuição. Fórmulas são obtidas em termos de poucos parâmetros facilmente mensuráveis. Esta abordagem simplifica substancialmente problemas de distribuição proporcionando exatidão suficiente para aplicações práticas. Ela permite avaliar rapidamente o *trade-offs* entre custos, usando uma calculadora de mão, evitando a necessidade de técnicas de programação matemática e algoritmos computacionais. Facilita também a análise sensível que indica como alteração de valores dos parâmetros podem afetar os custos e as estratégias operacionais.

HAN et al. (1986) apresentam estratégias para a distribuição de itens de um

depósito para muitos pontos de demanda sem transbordo e com restrição de tempo, objetivando determinar um zoneamento aproximadamente ótimo.

A primeira estratégia (*dual-strip*) é um roteamento que gera rotas de distâncias próximas às mínimas, utilizando os dois sentidos da rota para efetuar as visitas de tal forma que o primeiro e o último ponto de entrega são os pontos mais próximos do depósito (fig. 2.2.4). Essa estratégia determina as dimensões da zona e tamanho da carga que minimiza a média do custo de distribuição por ponto de serviço. O custo ótimo por ponto consiste em três componentes: primeiro, o custo por parada; segundo, a média do custo de operação local, que depende da distância local percorrida por ponto; terceiro, a média dos custos para percorrer a distância entre o depósito e a zona, que depende principalmente da distância da zona ao depósito e do tamanho da carga, ou o número de pontos servido pelo veículo. Essa estratégia produz aproximadamente a média mínima da distância local por ponto. Por isso, ela é apropriada para ser usada quando o custo de operação local é a maior componente do custo total de distribuição.

FIGURA 2.2.4 – ESTRATÉGIAS DE ROTEAMENTO DUPLO E SIMPLES



A segunda estratégia (*single-strip*) geralmente produz distâncias mais longas, pois percorre a rota efetuando visitas somente num sentido (fig. 2.2.4). Ela permite um número de pontos próximo do máximo para serem servidos numa jornada de trabalho. Esta estratégia é preferida quando o custo médio do deslocamento entre depósito e zona é a maior componente do custo total de distribuição.

A comparação dos custos de distribuição das duas estratégias mostra que o roteamento que efetua as visitas nos dois sentidos da rota deve ser aplicado, em geral, quando a zona de entrega está próxima ao depósito. Caso contrário, o roteamento que

efetua as visitas em um sentido da rota é mais apropriado. Portanto, para uma densidade de demanda constante, o zoneamento ótimo da região de serviço tem zonas maiores e mais largas próximo ao depósito e menores e mais estreitas ao longo dos limites da região (fig. 2.2.4).

DAGANZO (1988) examina maneiras para reduzir estoques nos problemas de distribuição física, nos quais itens são distribuídos de uma origem para muitos destinos. Em geral, a estratégia usando despachos com mais de uma visita por carga e sem transbordo é superior à estratégia que usa algum tipo de transbordo. Ainda que as condições que levem a esta conclusão não sejam sempre satisfeitas, os resultados sugerem que transbordos são indesejáveis para a distribuição de cargas. Isto está em contraste com operações de despacho de um para muitos, nas quais em alguns casos, é possível beneficiar-se de operações de transbordos.

Esse trabalho de Daganzo examina sistemas de distribuição de cargas, nos quais a produção de itens em uma única origem tem que ser carregada para muitos destinos. Para tal sistema, o despacho de itens diretamente para cada destino resulta em grandes estoques na origem porque a carga separada para cada destino está sempre em processo de formação. Para reduzir esse problema, os estoques para vários destinos podem ser consolidados num único despacho, que pode ser enviado tão logo atingir um tamanho suficiente. Assim, um único veículo servirá a todos os destinos devidamente consolidados num único despacho.

## **2.3 Modelo Contínuo para designação de Sistema em Produção-Distribuição**

No problema de designação de sistema em produção-distribuição, na grande maioria em trabalhos na literatura, são misturadas formulações de programação inteira na representação das decisões do planejamento. No entanto, em DASCI et al. (2001) é apresentada uma estrutura de modelagem alternativa que está baseada no uso de funções contínuas representando distribuição espacial de custo e demanda de cliente. O modelo contínuo proposto permite a derivação de várias perspectivas sobre o impacto de parâmetros de problema em decisões na designação de facilidade. A

proposta é que aproximações de modelagens discretas e contínuas se complementem uma a outra.

DASCI et al. (2001) dizem que modelos contínuos são usados com sucesso em logísticas, mas há provavelmente poucos artigos que usam modelos contínuos para designação de facilidade. Modelos desse tipo assumem que os clientes se encontram espalhados sobre uma determinada área de mercado e determinam a região ótima de serviço para cada facilidade que virá a ser estabelecida. Os locais ótimos de facilidades são identificados mais tarde. DASCI et al. (2001) descrevem uma avaliação das condições dadas em modelos discretos para designação de facilidade e apresenta uma base para a aproximação contínua. O modelo proposto unifica as predominantes aproximações contínuas e se estende para o problema de designação de sistema em produção-distribuição.

Em síntese, este artigo apresenta uma avaliação de modelos de aproximação discreta e contínua. Afirma que os modelos são mais eficientes se usados juntos. Embora modelos discretos sejam capazes de identificar uma configuração ótima, os dados e exigências computacionais aumentam consideravelmente para casos complexos enquanto que, para modelos estáveis e aplicáveis, as exigências diminuem.

## **2.4 Modelo que Utiliza Diagramas de Voronoi Associado a Problemas Logísticos**

Em seu artigo, NOVAES (2000) diz que o objetivo principal do problema de roteirização de veículos (*vehicle routing problems VRP*) é achar a melhor sucessão de visitas para minimizar o custo total do transporte e respeitar, ao mesmo tempo, exigências de serviço. O objetivo dos problemas de distritos na distribuição logística, por outro lado, é achar uma nova partição ótima da região abastecida pelo depósito na zona de entrega ou nos distritos. Este tipo de problema já foi tratado na literatura assumindo distritos geométricos amoldados (HAN et al., 1986; NOVAES et al., 2000). Diagramas de Voronoi têm sido usados com sucesso em soluções de engenharia e problemas de localização. Partindo de um padrão de distrito determinado previamente e relaxando os limites iniciais do distrito, é aplicada a formulação do diagrama de

Voronoi multiplicativo com pesos para definir novos contornos. O processo é iterativo e um teste de convergência indica o fim dos cálculos.

## **2.5 Considerações**

Os problemas de distribuição física de produtos apresentam parâmetros diferentes, tais como, forma da zona, característica da frota e densidade da demanda, não havendo uma única maneira de resolvê-los. Além disso, alguns modelos apresentam um alto grau de complexidade na resolução de problemas reais.

### 3 METODOLOGIA PROPOSTA

Neste trabalho é apresentado um método para o planejamento de um sistema de distribuição composto de duas partes distintas: primeiro é construída uma distribuição através da forma polar e, depois, baseado nesta, uma distribuição pelo diagrama multiplicativo de Voronoi com pesos é estabelecida sobre a região, utilizando um processo de convergência que visa equilibrar todos os distritos.

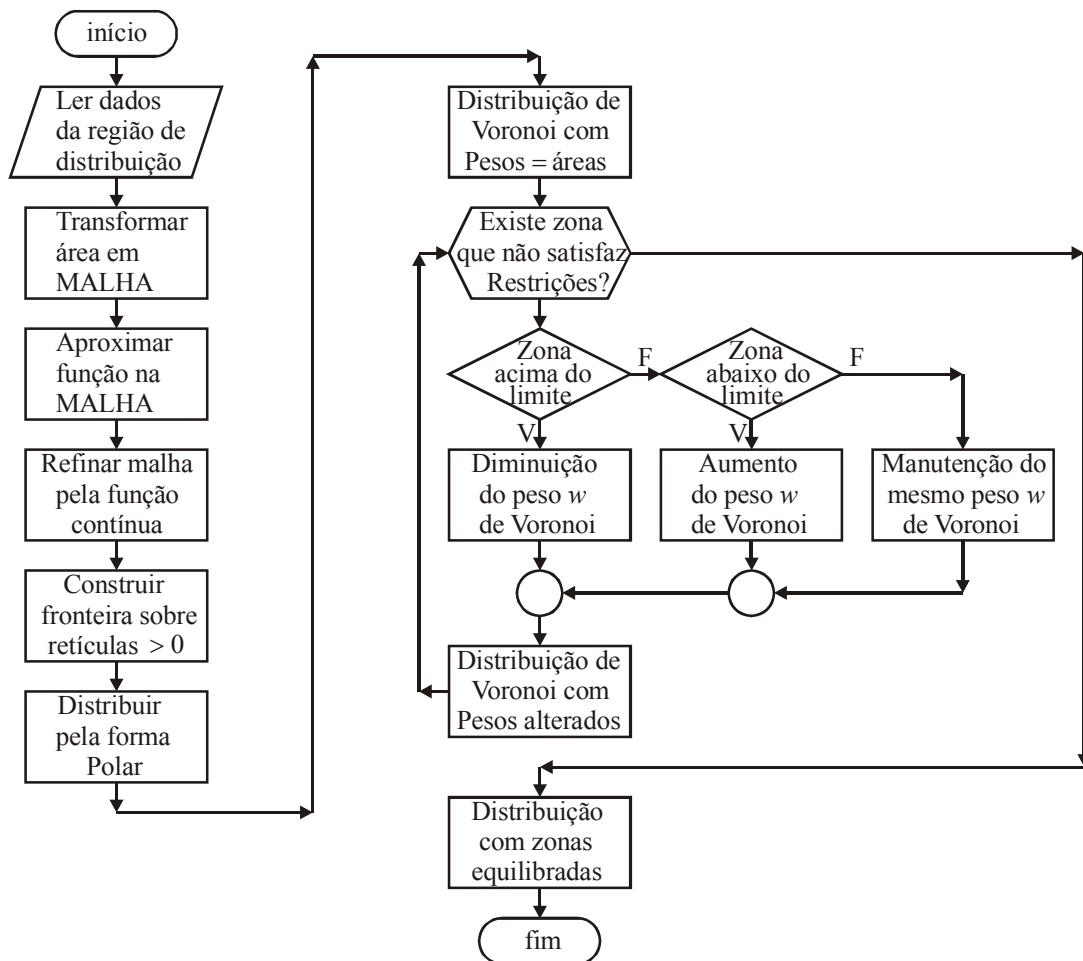
Para se estabelecer a seqüência de distribuição, alguns passos importantes são necessários. Os próximos capítulos visam criar condições para que as distribuições sejam bem definidas e equilibradas. Os passos seguintes determinam a metodologia proposta:

- i. O mapa da área de distribuição é transformado em uma malha;
- ii. É associada uma função de aproximação aos valores na malha. Utilizando uma função contínua de aproximação (capítulo 4) são aproximados por splines os valores para a função de ordem dois sobre as retículas na malha (capítulo 5);
- iii. A malha inicial é refinada com a utilização da função e a área de distribuição é preparada através da construção de uma fronteira que contorna os valores significativos (retículas com valores diferentes de zero) que serão utilizados para a distribuição Polar e de Voronoi (capítulo 5);
- iv. Com o sistema preparado, é feita a distribuição através de coordenadas polares, onde as zonas são determinadas através de limitações entre dois raios centrados em um depósito de distribuição, e, também, estas zonas são limitadas ao mesmo tempo entre dois ângulos, respeitando-se as restrições temporais e espaciais do sistema (capítulo 6, item 6.1);
- v. Utilizando a mesma malha refinada com a fronteira definida, são aproveitados os baricentros e as áreas das zonas obtidas da distribuição Polar para a aplicação do diagrama multiplicativo de Voronoi com pesos. As fronteiras desta aplicação são mais livres e têm uma forma mais apropriada ao equilíbrio sobre todas as zonas (distritos) (capítulo 6, item 6.2);

- vi. Para a visualização do processo de distribuição são obtidos alguns resultados computacionais (capítulo 7).

Para a distribuição Polar são utilizados muitos conceitos descritos no capítulo 2, mas para a distribuição de Voronoi são utilizados conceitos encontrados no Anexo 1, que é especialmente dedicado às definições básicas e generalizações dos diagramas de Voronoi.

FIGURA 3.1 – FLUXOGRAMA DO MODELO



## Base para a Metodologia Proposta

Após a primeira fase de distribuição onde é utilizada a forma Polar, dá-se início à segunda fase em que se aplica a distribuição de Voronoi com pesos. Para a segunda fase são usados os baricentros e as áreas equivalentes das zonas da primeira distribuição. Caso estes centros estejam distribuídos inadequadamente, a distribuição

seguinte pode não convergir e as zonas não chegarem a um equilíbrio. Para se garantir a existência de um conjunto de centros bem definidos que resultem na convergência da distribuição de Voronoi com pesos, existem trabalhos passados com distribuição robusta que foram tomados como base para a distribuição Polar deste trabalho.

Em NOVAES et al. (2000) e GRACIOLLI (1998) é desenvolvido um dimensionamento de sistemas de distribuição física de produtos que utiliza fronteiras polares para as zonas que garantem a obtenção dos centros adequados à aplicação da segunda fase deste trabalho. Assim, mantendo-se a base original dos trabalhos citados, são feitos alguns melhoramentos como: tratamento mais adequado das fronteiras das zonas que estão nos extremos da área de distribuição; distribuição que analisa simultaneamente a restrição por tempo da tripulação ou a restrição pela capacidade do veículo utilizado dentro de cada zona.

Tomando-se como base esses trabalhos, a distribuição através da forma Polar gera o conjunto de centros que permanecerá inalterado e gera também o conjunto de áreas das zonas. As áreas representam os primeiros pesos para a aplicação das distâncias multiplicativas de Voronoi. Estes pesos são alterados gradativamente até que o sistema atinja a convergência através do equilíbrio entre todas as zonas.



## 4 FUNÇÃO CONTÍNUA DE APROXIMAÇÃO

Esta função contínua de aproximação foi desenvolvida em 2001 por mim e por Arinei Carlos Lindbeck da Silva, através da idéia inicial de meu co-orientador, José Eduardo de Souza Cursi.

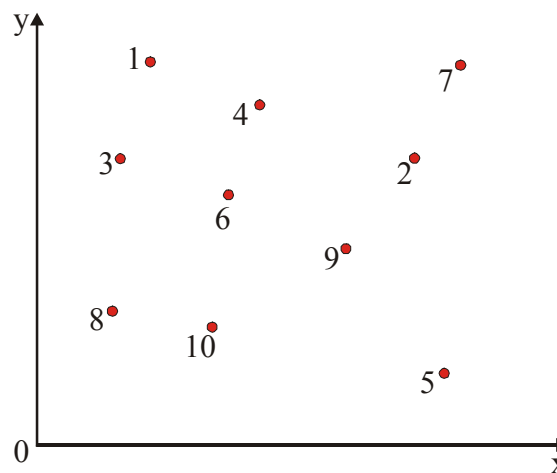
### 4.1 Modelo para a construção da função

O problema sobre o qual se falará terá inicialmente a característica de ser apresentado em forma cartesiana, no entanto tudo o que for mostrado posteriormente aplica-se a qualquer sistema de coordenadas.

O desenvolvimento atual nasceu da interação com estudos em mecânica, que utiliza há muito tempo Métodos de Elementos Finitos (MEF) para a resolução de seus problemas. A correlação com MEF está na utilização da malha em todo o domínio (que neste caso é o plano).

Toda a idéia da função será desenvolvida através do exemplo dado a seguir.

FIGURA 4.1 – PONTOS ALEATÓRIOS DISTRIBUÍDOS NO PLANO



Considerando-se que nos pontos acima (fig. 4.1) são conhecidas as coordenadas cartesianas  $P_i = (x_i, y_i)$   $i=1 \dots 10$ .

Seja o problema de determinar a quantidade de pontos existentes em uma área retangular hachurada (fig. 4.2). Computacionalmente varrem-se todos os pontos verificando quais deles têm as coordenadas dentro do limite dado. Se esta área

estivesse entre outros limites, novamente todos os pontos deveriam ser lidos.

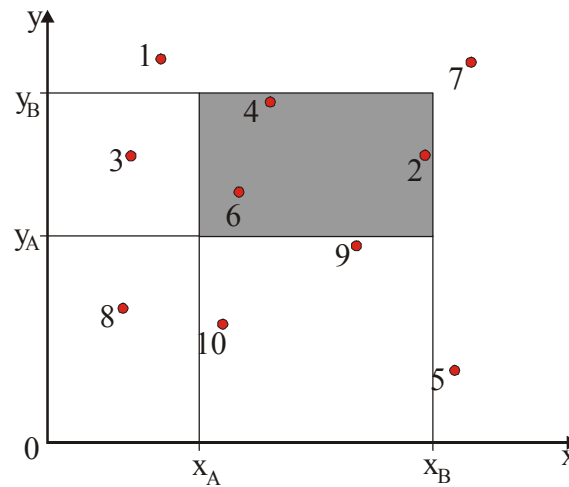
## 4.2 Número de Pontos em Uma Área Limitada

Para  $i$  variando de 1 a  $n$  pontos ( $i = 1 \dots n$ ).

Se  $x_a \leq x_i \leq x_b$  e  $y_a \leq y_i \leq y_b$

Então: O ponto é considerado da área limitada.

FIGURA 4.2 – PONTOS EM UMA ÁREA RETANGULAR



Para a resolução deste problema, sem a repetição exaustiva do processo, seria ideal trabalhar-se diretamente na área estabelecida esquecendo-se o resto do domínio. A função obtida neste trabalho satisfaz plenamente este ideal e, como posteriormente será mostrado, com excelente tempo de resposta.

Será construída esta função respaldando-a nos seguintes princípios:

## 4.3 Função Contagem

Dado um ponto  $P$ , associa-se a este ponto um número que representa a quantidade de pontos do problema compreendida na região  $x \leq x_P$  e  $y \leq y_P$  (fig. 4.3).

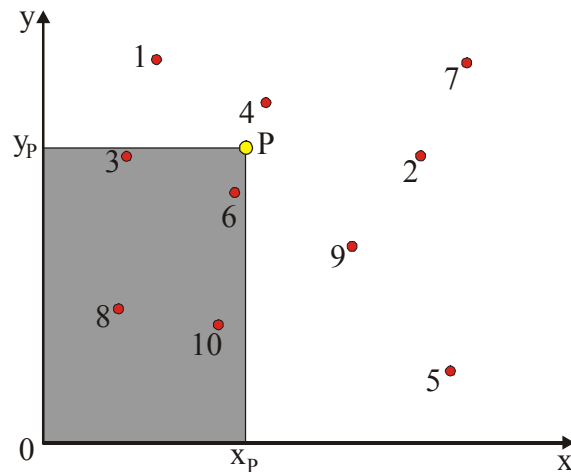
Assim sendo, para  $P$  qualquer, todo ponto à direita e acima de  $P$  terá valor associado maior ou igual a  $f(P)$ , e todo ponto à esquerda e abaixo de  $P$  terá valor associado menor ou igual que o de  $f(P)$ .

Utilizando estes princípios e observando a área hachurada na figura 4.2, será

determinada a quantidade de pontos ( $QP$ ), desta região estabelecida, efetuando-se a expressão (4.1) seguinte (fig. 4.4):

$$QP = f(x_B, y_B) + f(x_A, y_A) - f(x_A, y_B) - f(x_B, y_A) \quad (4.1)$$

FIGURA 4.3 – PONTOS DA FUNÇÃO CONTAGEM



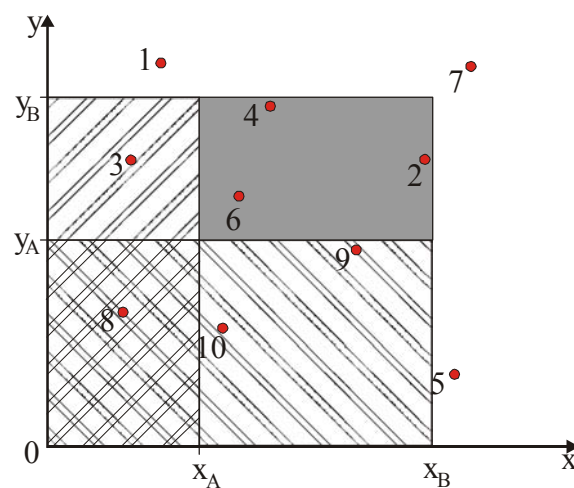
Na figura 4.3 observa-se que  $f(P) = 4$ .

Conclui-se que o conjunto assim definido será, devido à teoria dos conjuntos, fechado acima e à direita e aberto abaixo e à esquerda.

No exemplo tem-se (fig. 4.4):

$$QP = 7 + 1 - 2 - 3 = 3$$

FIGURA 4.4 – OBTENÇÃO DO NÚMERO DE PONTOS ATRAVÉS DA FUNÇÃO CONTAGEM



Sendo assim o problema de determinação de número de pontos de qualquer área retangular reduz-se à determinação do valor da função em seus vértices.

Conhecendo-se um número  $n$  de pontos deste plano, pode-se determinar qualquer combinação que forme retângulo entre eles.

## 4.4 Desenvolvimento da malha

À palavra malha pode-se associar o conceito de um reticulado, que é a divisão de uma área retangular em  $n$  linhas verticais por  $m$  linhas horizontais, que será suporte para a determinação de qualquer retângulo determinado sobre ela. Para se criar uma malha, são respeitados os seguintes critérios:

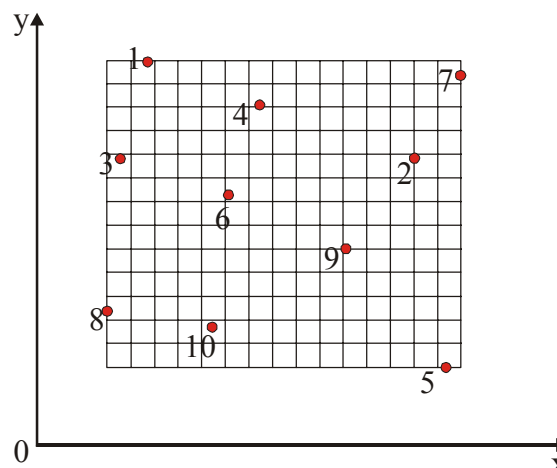
- i. São determinados os extremos dos pontos de trabalho. Sejam eles  $N$  (norte),  $S$  (sul),  $L$  (leste) e  $O$  (oeste).
- ii. A menor região que poderá ser determinada na malha será o retângulo de dimensão  $((L-O)/m) \times ((N-S)/n)$ .
- iii. Determinam-se os passos sobre os eixos  $x$  (horizontal) e  $y$  (vertical). O passo sobre o eixo  $x$  é  $p_x = (L-O)/m$  e sobre o eixo  $y$  é  $p_y = (N-S)/n$ .

## 4.5 Observações sobre a malha

Neste trabalho será sempre considerada uma malha de área mínima quadrada, caso em que  $p_x = p_y$ .

A determinação do número de pontos dentro de qualquer retângulo, com vértices em pontos da malha, é obtida diretamente da utilização da expressão (4.1).

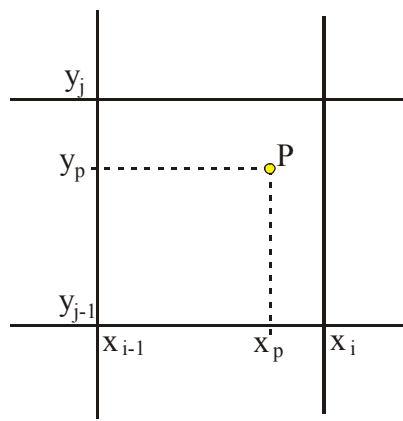
FIGURA 4.5 – OBTENÇÃO DE UMA MALHA DE  $15 \times 13$



O número de retículas dentro de uma malha é determinado pelo produto  $m \times n$ . Utiliza-se o termo “refinamento da malha” para o aumento do número de divisões  $m$  e/ou  $n$ .

Resta agora se determinar a quantidade de pontos para retângulos com vértices não pertencentes à intersecção da malha. Para isso é necessária a introdução do conceito de aproximação. Para a explicação deste conceito será apresentado um exemplo, baseado na figura 4.6.

FIGURA 4.6 – APROXIMAÇÃO DE UM PONTO NÃO PERTENCENTE À INTERSECÇÃO DA MALHA



Observa-se nesta figura, em detalhe, quatro nós da malha. Onde se quer determinar o valor da função contagem para o ponto  $P$  não pertencente à intersecção da malha. Pelas considerações anteriores pode-se afirmar:

$$f(x_i, y_j) \geq f(x_i, y_{j-1}) \geq f(x_{i-1}, y_{j-1})$$

$$f(x_i, y_j) \geq f(x_{i-1}, y_j) \geq f(x_{i-1}, y_{j-1})$$

Também se podem considerar quatro diferentes planos, determinados cada um pela terna de pontos:

$$[(x_{i-1}, y_{j-1}, f(x_{i-1}, y_{j-1})), (x_i, y_{j-1}, f(x_i, y_{j-1})), (x_i, y_j, f(x_i, y_j))] \quad - \quad \text{plano 1}$$

$$[(x_{i-1}, y_{j-1}, f(x_{i-1}, y_{j-1})), (x_{i-1}, y_j, f(x_{i-1}, y_j)), (x_i, y_j, f(x_i, y_j))] \quad - \quad \text{plano 2}$$

$$[(x_{i-1}, y_{j-1}, f(x_{i-1}, y_{j-1})), (x_i, y_{j-1}, f(x_i, y_{j-1})), (x_{i-1}, y_j, f(x_{i-1}, y_j))] \quad - \quad \text{plano 3}$$

$$[(x_i, y_j, f(x_i, y_j)), (x_i, y_{j-1}, f(x_i, y_{j-1})), (x_{i-1}, y_j, f(x_{i-1}, y_j))] \quad - \quad \text{plano 4}$$

Calcula-se o valor de  $f(P) = f(x_p, y_p)$  = média do valor assumido por  $(x_p, y_p)$  em cada um dos quatro planos anteriores.

Pela forma como foi construída esta aproximação a função resultante é contínua, porém, não derivável. Na continuação deste trabalho, é utilizada uma

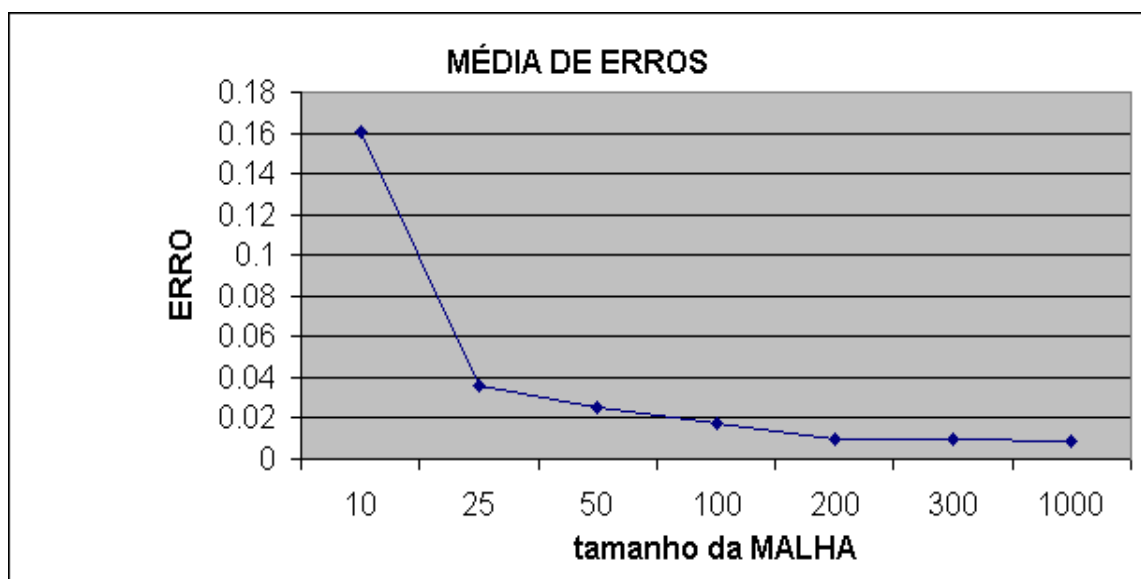
aproximação derivável que será mais detalhada no próximo capítulo (aproximação por SPLINES).

Para uma melhor avaliação dos resultados, foi desenvolvido um programa que aproxima a quantidade de pontos em uma região retangular qualquer.

Como exemplo de dados, foram utilizados os pontos considerados no trabalho de NOVAES et al. (1999), com diferentes refinamentos da malha.

## 4.6 Resultado dos testes

TAMANHO DA MALHA:	10	25	50	100	200	300	1000
DADOS ESTATÍSTICOS:							
MÉDIA	0.160948	0.035669	0.02527	0.01743	0.009827	0.009341	0.008794
ERRO PADRÃO	0.029516	0.003412	0.002838	0.001988	0.001199	0.001232	0.000781
MEDIANA	0.037931	0.009984	0.005888	0.003922	0.002213	0.002047	0.002993
MODO	0	0	0	0	0	0	0
DESVIO PADRÃO	0.933373	0.107888	0.089746	0.062862	0.037931	0.038954	0.024694
VARIÂNCIA DA AMOSTRA	0.871184	0.01164	0.008054	0.003952	0.001439	0.001517	0.00061
CURTOSE	416.5433	149.9666	273.9529	133.6405	468.9138	432.2221	126.6951
ASSIMETRIA	19.07548	10.44845	14.36813	10.21167	18.81704	18.31283	9.813795
INTERVALO	23	2	2	1	1	1	0.4
MÍNIMO	0	0	0	0	0	0	0
MÁXIMO	23	2	2	1	1	1	0.4
SOMA	160.9478	35.66881	25.26971	17.4301	9.82727	9.341386	8.794069
CONTAGEM	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
NÍVEL DE CONFIANÇA(95,0%)	0.05792	0.006695	0.005569	0.003901	0.002354	0.002417	0.001532



Em todos os testes realizados o tempo de processamento foi inferior a 1/17

do tempo de contagem direta (conforme o algoritmo de contagem).

Em malhas menos refinadas, como 10, 25, 50, o tempo de processamento foi inferior a 1/25 do tempo de contagem direta.

## 4.7 Comentários

Se for considerada uma malha em uma cidade como, por exemplo, São Paulo, onde a área mínima seja  $900 \text{ m}^2$  (correspondente a um quadrado de  $30 \text{ m}$  de lado), pode-se verificar que, na área de Transporte e Logística, uma localização nesta malha tem sua aproximação satisfatória. Isso se dá visto que o cliente pode ser localizado considerando-se diretamente a retícula que o contém de forma que o erro máximo não ultrapassaria 30 metros.

A utilização de uma forma reticulada para qualquer formato que se faça necessário no desenvolvimento de modelos deve gerar economia computacional.

Com a economia de tempo computacional da determinação da demanda das diversas áreas, métodos iterativos podem ser utilizados com maior eficácia.

As mesmas considerações feitas para a forma retangular podem ser feitas para a forma polar.

## 5 PROBLEMA INICIAL

Em logística urbana existem problemas de difícil resolução, mas um deles, o que será abordado neste trabalho, é um sistema de distribuição típico em que veículos fazem entregas de um depósito central para atender clientes que estão geograficamente dispersos por uma determinada região. Em muitas aplicações o objetivo comum é determinar um conjunto de zonas (distritos) de distribuição física de produtos, de forma que para cada zona é estimada a distância para um roteiro de entrega, a ser realizado por um veículo, que satisfaz restrições espaciais e temporais minimizando o custo total de operação da frota.

O gerenciamento da distribuição física se dá em três níveis: estratégico, tático e operacional.

No nível estratégico o horizonte de análise é de longo prazo, com o objetivo genérico de definição das linhas gerais, dos requisitos e da configuração geral do sistema de distribuição. São considerados aspectos que levam em conta os seguintes dados: a) O número e a localização de instalações produtivas e de armazenamento, tais como fábricas, armazéns e centrais de distribuição; b) Os canais de distribuição; c) Os meios de transporte e tipos de veículo a serem utilizados; d) O sistema de processamento de pedidos e faturamento; e) etc. (BALLOU, 1993).

No nível tático há um planejamento de curto prazo, de forma a assegurar a maior eficiência na operação do sistema de distribuição, bem como na utilização dos equipamentos, dos veículos e das instalações, definidas no nível estratégico.

O nível operacional engloba a programação, execução e controle das atividades diárias, de forma a assegurar o deslocamento dos produtos para os canais de distribuição ou diretamente para os mercados consumidores, no tempo correto. Diversas atividades compõem a rotina da operação de distribuição, entre elas os procedimentos de armazenamento e movimentação interna de materiais, o processo de carregamento dos veículos e a programação dos roteiros de entregas.

Para que a otimização dos roteiros dê resultados satisfatórios é preciso que o sistema tenha sido bem planejado e bem dimensionado nos níveis estratégicos e



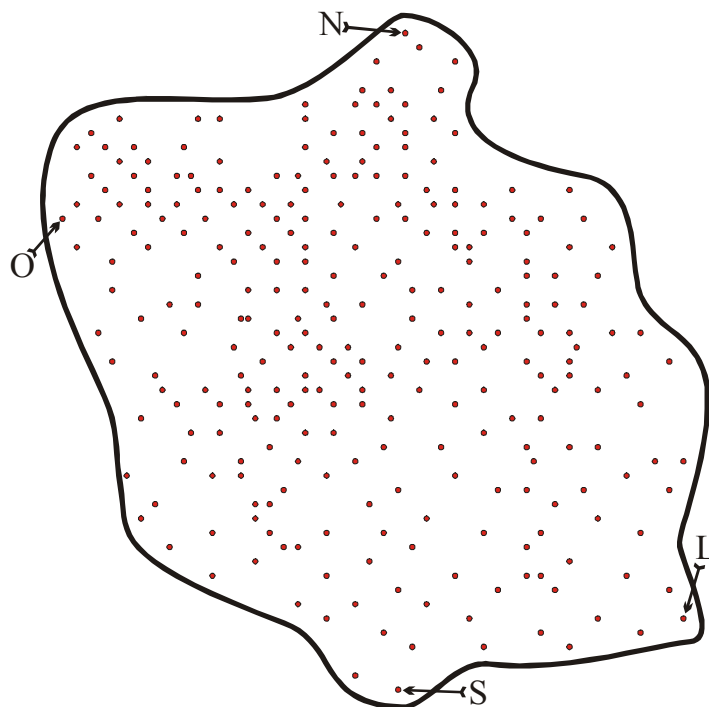
táticos. O problema da roteirização surge na fase de operação do sistema quando já estão definidas a frota e as zonas de distribuição.

O problema principal proposto para ser resolvido neste trabalho é o de definir uma frota e as zonas para uma região de distribuição física de produtos, onde as mercadorias são entregues a partir de um depósito, para  $n$  clientes através de uma frota de veículos homogêneos. A resolução do problema considerando mais de um depósito e/ou considerando veículos não homogêneos será tratada em trabalhos futuros.

## 5.1 Método Geral para Resolver Problemas de Distribuição

Considerando inicialmente  $n$  clientes sobre uma área de distribuição (fig. 5.1), a primeira parte para a resolução do problema é definir a aproximação para uma função contínua  $G$  que cubra toda a área a ser atendida.

FIGURA 5.1 – CLIENTES SOBRE UMA ÁREA DE DISTRIBUIÇÃO



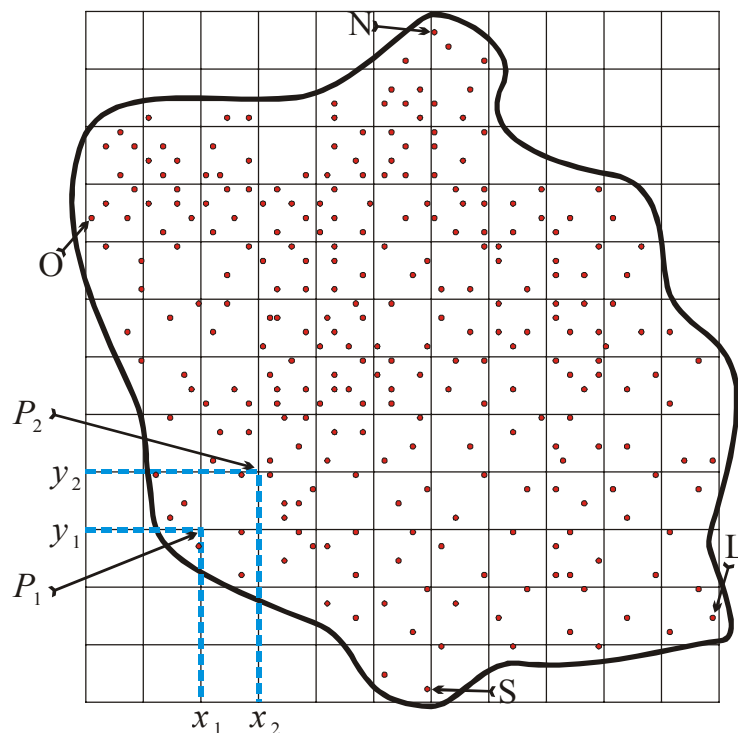
De acordo com PERSIANO (1996), pode-se considerar uma interpolação com maior simplicidade de representação da superfície solução. Nessa abordagem, os valores  $f(P_k)$ , que se referem a valores reais para um ponto  $P_k$ , não são tomados como

uma restrição dura, como uma imposição a atender a todo custo, mas sim como um valor fortemente desejável para  $G$  no ponto  $(x_k, y_k)$ .

A estratégia típica de modelagem de terrenos consiste em dividir a construção do modelo em duas etapas. Na primeira, uma malha regular de retângulos é criada e estimam-se valores para a função  $G$ , de forma que em cada nó, são levados em conta os valores dados associados aos pontos que lhe são vizinhos. Na segunda etapa, descartam-se integralmente os dados pontuais, que são substituídos pelos nós da malha e suas estimações. A construção do modelo é completada aplicando-se à malha de estimações uma técnica de interpolação. Neste trabalho a estimacão é feita por splines.

Para se criar uma malha de estimacões, inicialmente tomam-se os pontos extremos em relação aos clientes, sendo eles: N (ponto mais ao norte), S (ponto mais ao sul), L (ponto mais ao leste) e O (ponto mais ao oeste), (fig. 5.2).

FIGURA 5.2 – MALHA INICIAL SOBRE UMA ÁREA DE DISTRIBUIÇÃO



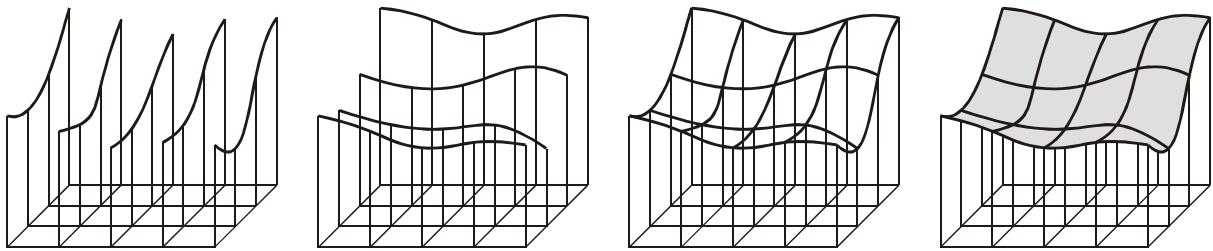
Com base nos pontos extremos, o próximo passo é definir a malha sobre a área de trabalho (fig. 5.2). As estimacões nos nós da malha são construídas de acordo com a função contagem definida no capítulo 4, item 4.3. Esta função é aplicada em cada nó da malha da seguinte forma: dado um ponto  $P$ , associa-se a este um número

que representa a quantidade de pontos compreendidos na região  $x \leq x_p$  e  $y \leq y_p$  ou a soma dos valores associados a estes pontos.

É definido desta forma o valor de cada nó da função  $f(P)$  em toda a malha. Para  $P$  qualquer, todo ponto à direita e acima de  $P$  terá valor associado maior ou igual a  $f(P)$ , e todo ponto à esquerda e abaixo de  $P$  terá valor associado menor ou igual que o de  $f(P)$ . Como exemplo, na malha (fig. 5.2), têm-se  $f(P_1) = f(x_1, y_1) = 1$  e  $f(P_2) = f(x_2, y_2) = 7$ .

Para uma estimação da função  $G(P)$  sobre toda a malha, será utilizada a técnica de interpolação bi-variada por splines. Conforme PERSIANO (1996), dados os valores reais  $x_i, y_j$  e  $f_{ij}$ , com  $i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M$ , pode-se determinar uma função real bi-variada  $G$  tal que  $G(x_i, y_j) = f_{ij}$ . Esse problema restringe-se a dados  $f_{ij}$  localizados sobre os nós  $(x_i, y_j)$  de uma grade retangular. Será explorada aqui sua solução com base em splines naturais diferenciáveis até ordem 2.

FIGURA 5.3 – SPLINES NATURAIS INTERPOLADORAS.



Na figura 5.3 os interpoladores univariados das linhas e das colunas formam uma malha de linhas sobre a qual a superfície do gráfico do interpolador bivariado se apóia.

Para cada linha  $j$  da malha de dados, pode-se determinar a solução  $L_j$  do problema de interpolação spline univariado daquela linha. Cada interpolador  $L_j$ , cumpre as condições  $L_j(x_i) = f_{ij}$  e pode ser expresso em termos da base de splines naturais:

$$L_j(x) = \sum_{i=0}^N f_{ij} X_i(x) \quad (5.1)$$

onde  $(X_i, i = 0, 1, \dots, N)$  é base cardinal da spline natural sobre o conjunto de nós  $x_i$ , ou

seja,  $X_i(x_k) = \delta_{ik}$ . Observe que a mesma base ( $X_i$ ) pode ser usada em cada linha  $j$ , pois os dados  $f_{ij}$  dessa linha estão associados aos mesmos valores de nós  $x_i$ .

De modo semelhante, podem-se interpolar os dados em cada coluna  $i$ , com splines  $C_i$ :

$$C_i(y) = \sum_{j=0}^M f_{ij} Y_j(y) \quad (5.2)$$

recorrendo à base cardinal ( $Y_j, j = 0, 1, \dots, M$ ) da spline natural sobre os nós  $y_j$ . O gráfico das soluções de cada linha e cada coluna formam uma malha retangular de curvas que interpolam as cotas nos vértices da malha de pontos dados (fig. 5.3). O objetivo é determinar  $G$  coincidente com  $L_j$  em cada linha  $j$  e com  $C_i$  em cada coluna  $i$ .

Considere agora a seguinte spline bi-variada, produto daquelas duas bases interpoladoras:

$$G(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M f_{ij} X_i(x) Y_j(y) \quad (5.3)$$

A spline  $G$  certamente interpola os dados, pois:

$$G(x_k, y_l) = \sum_{j=0}^M \left( \sum_{i=0}^N f_{ij} X_i(x_k) \right) Y_j(y_l) = \sum_{j=0}^M L_j(x_k) Y_j(y_l) = \sum_{j=0}^M f_{kj} Y_j(y_l) \\ G(x_k, y_l) = f_{kl} \quad (5.4)$$

e, em adição,  $G$  é diferenciável até ordem 2, pois as funções de base o são.

## 5.2 Aproximação Spline Utilizando uma Função de Base

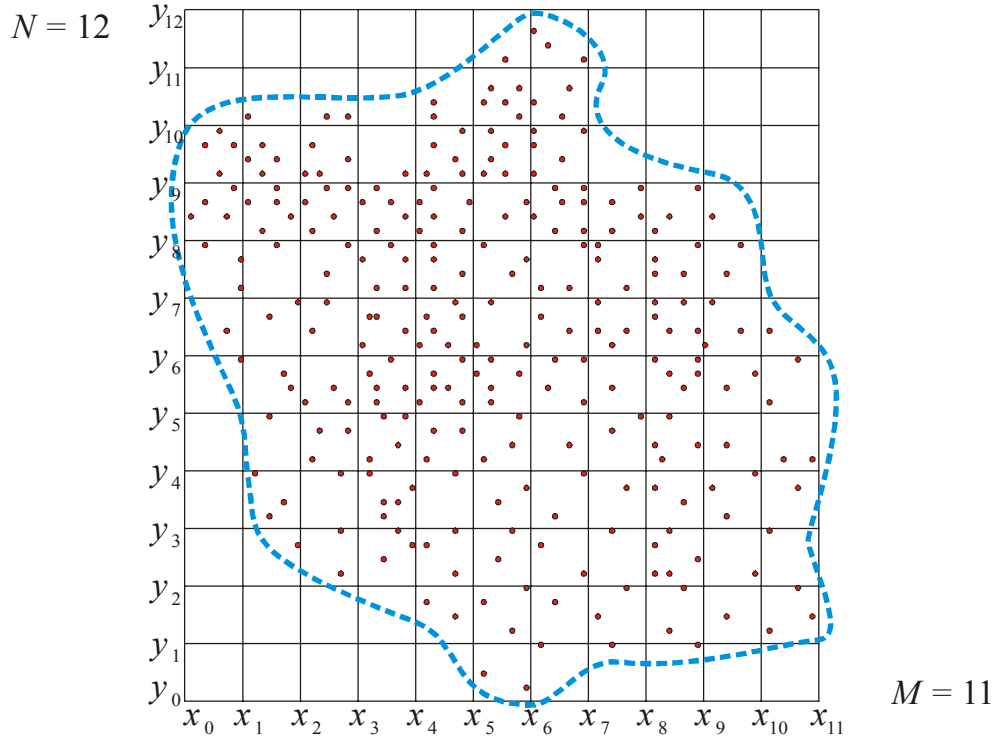
A função  $G$  é obtida então, em cada nó, com influência de seus vizinhos, através dos coeficientes de aproximação  $a_k$  com  $k = 1, \dots, 6$ , tal que

$$G(x, y) \cong P^{ij} = a_1 + a_2 dx + a_3 dy + a_4 dx dy + a_5 dx^2 + a_6 dy^2 \quad (5.5)$$

sendo  $dx = (x - x_i)$ ,  $dy = (y - y_j)$  e  $P^{ij}$  a representação de  $G$  na retícula  $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  onde está situado o ponto de coordenadas  $(x, y)$ .

A spline  $G$  interpola o domínio através de uma malha  $M \times N$  com base nos nós de coordenadas  $(x_i, y_j)$  com  $i = 0, \dots, M$  e  $j = 0, \dots, N$ , (fig. 5.4).

FIGURA 5.4 – VARIAÇÃO DA MALHA INICIAL



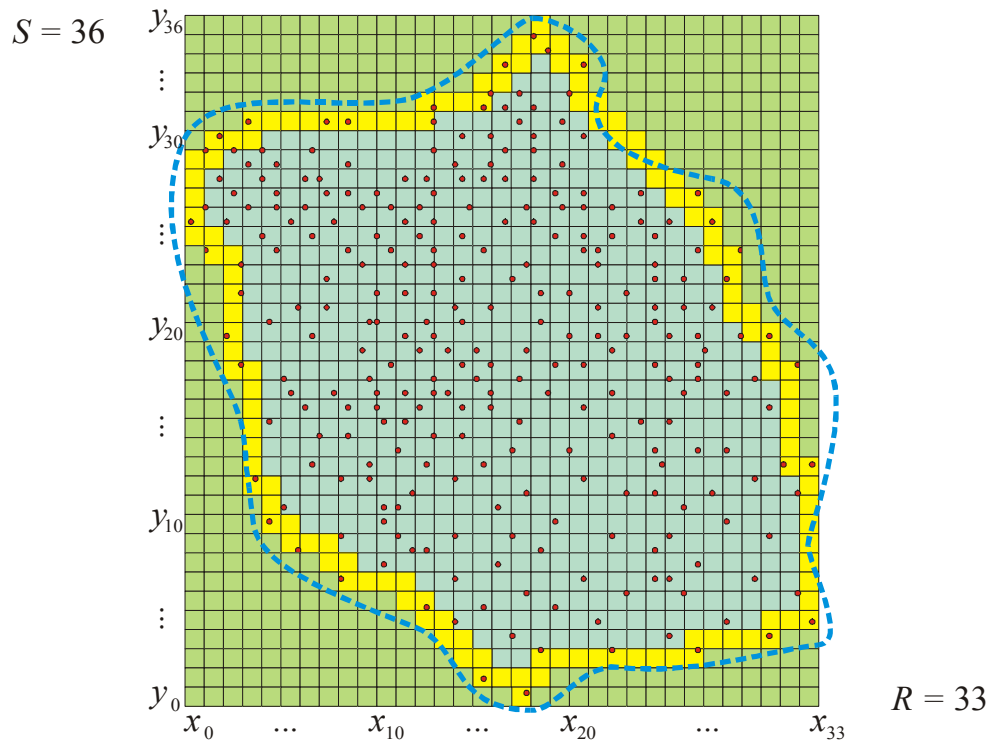
Com base na spline  $G$ , é feito um refinamento da malha inicial, obtendo-se, assim, as aproximações sobre as novas retículas. Todos os valores nas retículas da malha refinada (fig. 5.5) são aproximados pela spline  $G$  com base diretamente sobre as retículas da primeira malha (fig. 5.4),  $[x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}]$ .

A malha refinada é de ordem  $R \times S$  ( $R \geq M$  e  $S \geq N$ ) e as retículas são localizadas através das coordenadas  $(x_k, y_l)$  com  $k = 0, \dots, R$  e  $l = 0, \dots, S$ , (fig. 5.5). Os valores para cada coordenada  $(x_k, y_l)$  se dão pela spline  $G$  dentro de cada retícula  $[x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}]$  onde  $x_{i-1} < x_k \leq x_i$  ( $k = 0, \dots, R$  e  $i = 0, \dots, M$ ) e  $y_{j-1} < y_l \leq y_j$  ( $l = 0, \dots, S$  e  $j = 0, \dots, N$ ). Já com os valores aproximados definidos, todas as considerações e trabalhos dessa fase em diante são feitos com base sempre nas retículas da malha refinada, desconsiderando-se assim os valores pontuais anteriores.

Inicialmente é obtida a matriz que representa a fronteira do domínio onde os

valores da malha que estão fora de fronteira são iguais a um negativo ( $-1$ , representado pela cor verde na figura 5.5), os que estão na fronteira são iguais a um ( $1$ , representado pela cor amarela) e os valores internos iguais a zero ( $0$ , representado pela cor azul).

FIGURA 5.5 – VARIAÇÃO DA MALHA REFINADA E A DEFINIÇÃO DA FRONTEIRA DO DOMÍNIO



Maiores detalhes para esta distribuição podem ser obtidos na seqüência, através do método proposto para resolver o problema inicial.

## **6 MÉTODO PROPOSTO PARA RESOLVER O PROBLEMA INICIAL**

### **6.1 Distribuição do Sistema Através de Coordenadas Polares**

#### **6.1.1 Introdução**

O problema a ser resolvido será de distribuição em que veículos fazem entregas de um depósito central para atender clientes que estão geograficamente dispersos por uma determinada região. O objetivo principal será a determinação de um conjunto de zonas para cada uma das quais está associado um veículo que percorrerá uma distância a ser aproximada de forma a satisfazer restrições espaciais e temporais, minimizando o custo total de operação da frota.

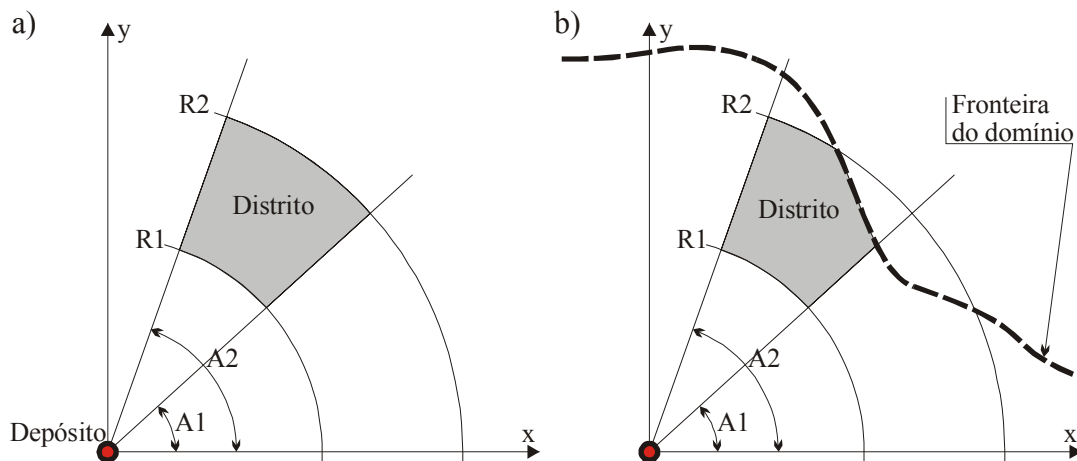
Inicialmente são lidos, de um arquivo, valores referentes aos pontos de entrega. Para esses valores, os seguintes dados, em relação a cada cliente, serão considerados: identificação, coordenadas, tempo de parada e carga a ser entregue no local.

Para se estabelecer uma distribuição de materiais dentro de um plano (seja ele de um país, estado, cidade etc.) utiliza-se uma aproximação com base na função apresentada no Capítulo 4 e o desenvolvimento da aproximação como base para se obter uma malha (Capítulo 5), que fornece valores essenciais dentro de cada distrito (zona), como: área, carga, distância, número de pontos e tempo de atendimento. Como foi especificado no capítulo anterior, a aproximação da função é obtida através de uma malha (retículas) relacionada à área de atuação. Cada retícula da malha é um quadrado de lado (em metros) determinado pelo usuário. O lado dessa retícula terá o valor de acordo com a precisão que o usuário necessita em relação à localização de seus clientes. Estas aproximações têm que apresentar um resultado satisfatório em termos de precisão, mas também têm que compensar em termos de tempo de processamento.

Com base no depósito central as zonas (distritos) começam a ser determinadas. A construção é estabelecida com relação às coordenadas polares cujo centro polar é o depósito. Se o depósito estiver dentro da área de distribuição (domínio) a primeira zona terá como fronteira um círculo de raio  $R1$  com interseção, se existir, à fronteira do domínio. Caso esteja fora do domínio, a fronteira será como as outras zonas, caso que será exposto na sequência.

Para a determinação das zonas (distritos) serão considerados anéis com limite inferior no raio  $R1$  e limite superior no raio  $R2$  (fig. 6.1.1). Em cada anel são determinadas zonas que têm início no ângulo  $A1$ , fim no ângulo  $A2$  e são limitadas entre os raios. Se a zona tiver interseção com a fronteira do domínio ( $FD$ ), esta fará parte de sua fronteira também (fig. 6.1.1b).

FIGURA 6.1.1 – DETERMINAÇÃO DOS LIMITES DE UMA ZONA



Para cada anel, é ajustado o raio  $R2$  de tal forma que todos os  $m$  distritos do anel atinjam um equilíbrio. Cada distrito é obtido alterando-se o ângulo  $2$  até que esta zona chegue em seu limite. Após se repetir esta operação para todos os distritos do anel, será analisada a última zona (distrito  $m$ ), fixada na primeira iteração do anel, onde se verifica a necessidade de aumentar ou diminuir o raio  $R2$ . A convergência é atingida, dentro do anel, quando a última zona atingir um limite mínimo (fig. 6.1.2).

Para saber o estado de cada distrito e chegar a seu limite, alguns valores são calculados a cada alteração de seu contorno para serem comparados às restrições do problema. São estes os valores:

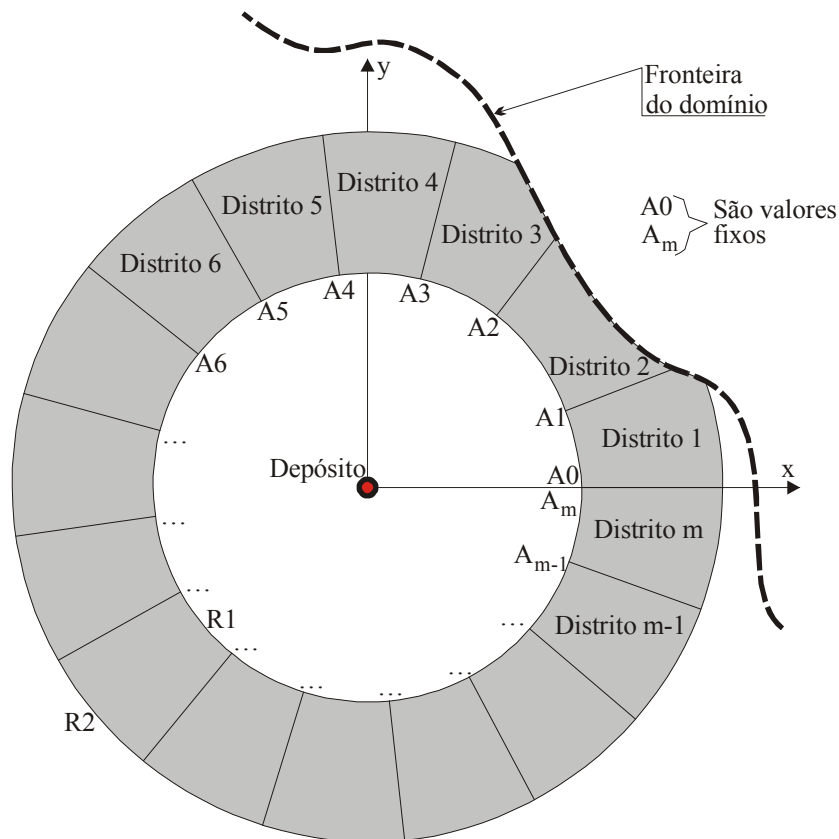
- i. Distância percorrida pelo veículo desde sua saída do depósito, viagem pelo



distrito e volta para o depósito.

- ii. Tempo gasto por este veículo para fazer o percurso. Na maioria dos problemas o tempo não deve ultrapassar uma jornada diária, ou seja, próximo de oito horas.
- iii. Carga máxima do veículo. A escolha da capacidade dos veículos dentro de um problema vai depender normalmente da quantidade de carga a ser entregue em cada ponto de visita e da densidade da zona de entrega. Por exemplo: para se entregar em média 8kg de material por visita em uma região com densidade média de  $7\text{ptos}/\text{km}^2$ , foram usados veículos de 500kg.

FIGURA 6.1.2 – CONSTRUÇÃO DE UM ANEL



## 6.1.2 Algumas Definições Importantes

### Definições em Relação aos Anéis

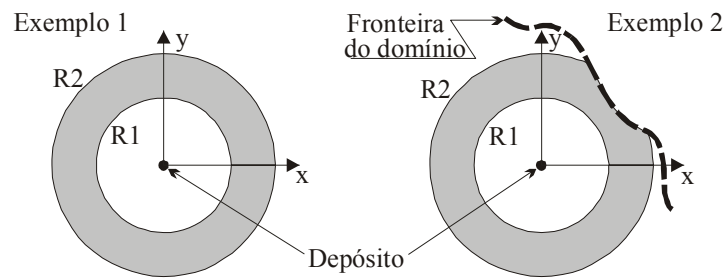
Considerando-se os tipos possíveis de anéis, seguem abaixo algumas

definições importantes.

### Definição P1 – Anel Fechado

É o anel cujo raio  $R1$  não tem contato com a fronteira do domínio (fig. 6.1.3) existindo uma continuidade dentro do anel.

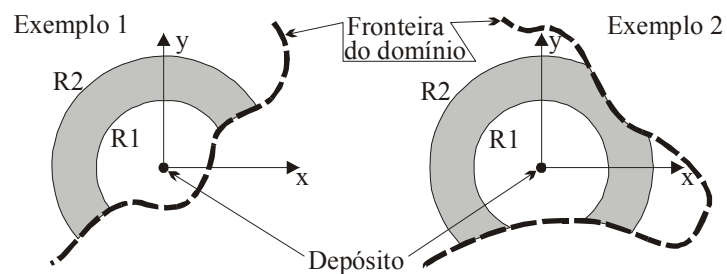
FIGURA 6.1.3 – ANEL FECHADO



### Definição P2 – Anel Aberto

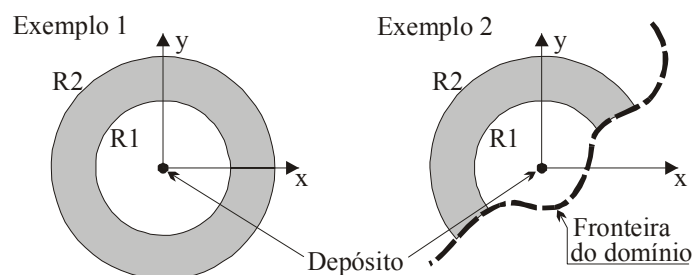
É o anel cujo raio  $R1$  intercepta a fronteira do domínio (FD) (fig. 6.1.4) ou existe uma descontinuidade dentro do anel.

FIGURA 6.1.4 – ANEL ABERTO



### Definição P3 – Anel Livre

FIGURA 6.1.5 – ANEL LIVRE

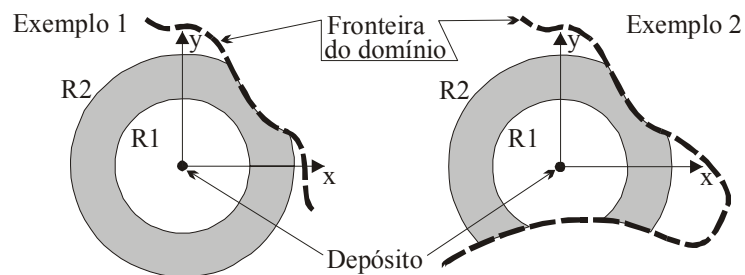


É o anel cujo raio  $R2$  não tem contato com a fronteira do domínio ( $FD$ ) ou o anel é inteiramente cortado pela  $FD$  (fig. 6.1.5).

#### Definição P4 – Anel Restrito

É o anel cujo raio  $R2$  intercepta a fronteira do domínio ( $FD$ ) em uma parte onde não há a interseção com o raio  $R1$  (fig. 6.1.6).

FIGURA 6.1.6 – ANEL RESTRITO



## Adaptações em um Distrito para a Forma Polar de Processos de Aproximação

### Fator de Esbeltez para um Distrito de Forma Retangular

São consideradas as formulações de DAGANZO (1984b), retratadas no capítulo 2, item 2.2.2, que estão definidas para um retângulo. As adaptações para a forma polar encontram-se na sequência.

### Distância e Tempo de Viagem em um Distrito $D_i$

A distância percorrida dentro da zona compreende a soma dos deslocamentos consecutivos entre as entregas. Dado  $n$  pontos localizados uniformemente e independentemente sobre uma zona aproximadamente compacta e convexa de área  $A$ , LARSON et al. (1981), o valor esperado do comprimento da rota ótima,  $E(L_i)$ , para o problema do caixeiro viajante determinístico pode ser aproximado, (BEARDWOOD et al., 1959), pela seguinte expressão:

$$E(L_i) = k\sqrt{A_i n_i} \quad (6.1.1)$$

onde  $k$  é uma constante,  $A_i$  a área e  $n_i$  o número de pontos (atendimento) da zona  $D_i$  considerada.

A constante  $k$  depende da métrica utilizada e da estratégia de distribuição. Um valor muito usado para  $k$  na métrica Euclidiana foi estimado aproximadamente em 0.765 por STEIN (1978).

Admitindo que há uma probabilidade  $p$  de os  $n$  pontos da rota requererem uma visita num dia aleatório, o número  $k$  de pontos visitados em um dia é uma variável aleatória. Uma estratégia para esse problema é determinar uma rota otimizada para ser seguida em todos os dias. O veículo visitaria todos os clientes sempre na mesma seqüência, mas não pararia nos pontos que não requeressem o serviço naquele dia. A partir de fórmulas de aproximações similares à de BEARDWOOD et al. (1959) para o PCV (Problema do Caixeiro Viajante) clássico, JAILLET et al. (1988) desenvolveram uma formulação também para o PCV probabilístico que estima a distância percorrida numa rota:

$$E(L_i) = k_0\sqrt{A_i n_i} \quad (6.1.2)$$

tal que  $k\sqrt{p} \leq k_0 \leq \min(k; 0.9204\sqrt{p})$  com  $0 \leq p \leq 1$  e  $k$  é a constante já definida.

Incluindo também um fator de correção da distância,  $k'$ , resultando em percursos maiores devido às normas do sistema viário, ruas de mão única, por exemplo. O valor desse fator de correção da distância, maior que um, depende do caso em estudo. Em geral, é determinado da seguinte forma: definem-se alguns pontos sobre a região e estima-se, através de regressão linear, a relação entre as distâncias euclidianas e as distâncias reais (medidas sobre a rede viária obedecendo à sinalização existente). Usualmente adota-se um valor no intervalo entre 1.25 e 1.40, ou mais para áreas urbanas. Então a expressão (6.1.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$E(L_i) = kk'\sqrt{A_i n_i} \quad (6.1.3)$$

onde  $k$  é a mesma constante já definida e  $k'$  é o coeficiente de correção da distância.

Dada uma zona retangular de lados  $\ell$  e  $\ell'$ , ( $\ell < \ell'$ ) com o lado maior em direção ao depósito, pode ser vantajoso alongar a zona em direção ao depósito, isto é, aumentar  $\ell'$  e diminuir  $\ell$  mantendo-se a área constante. Dessa forma, a distância dentro da zona, se mantém a mesma, pela expressão (6.1.1), enquanto que a distância da zona até o depósito diminui, conseqüentemente, diminuindo o custo total do roteiro. Mas esse alongamento em direção ao depósito tem um limite. Uma deformação excessiva pode levar a um aumento substancial na distância percorrida no roteiro dentro da zona.

Introduzindo um coeficiente de correção  $\rho$  ( $\rho \geq 1$ ) que leva em conta a esbeltez da zona para ser aplicado sobre  $D_i$  dado pela expressão (6.1.3):

$$E(L_i) = \rho k k' \sqrt{A_i n_i} \quad (6.1.4)$$

Considerando  $\beta = \ell/\ell'$  como sendo o coeficiente de esbeltez de um retângulo, sobre uma zona retangular hipotética de área constante, NOVAES et al. (1999) desenvolveram num experimento simulações e calibrações para estimar o valor de  $\rho$  resultando na seguinte expressão empírica:

$$\rho(n, \beta) = \frac{k_1}{2} \left( 1 + k_2^{\lambda-1} n^{(\lambda-1)k_3} \right) \quad (6.1.5)$$

onde  $\lambda = 1/\beta$ ,  $k_1 = 1.0498$ ,  $k_2 = 1.276$  e  $k_3 = -0.05$ .

O tempo de viagem dentro da zona  $D_i$  pode ser estimado pela seguinte expressão:

$$E(T_i) = \alpha \sqrt{A_i n_i} \quad (6.1.6)$$

onde  $\alpha$  é um valor médio que representa  $1/V_i$  ( $V_i$  é a velocidade média do veículo dentro da zona de entrega), determinado através de simulações. Através de experimentos sobre a área de estudo, é considerado  $\alpha=2.59$ , sendo  $A$  dado em  $km^2$  e  $T_i$  em minutos, (NOVAES et al., 1999).

## Considerações para os Distritos Seguindo-se a Forma Polar

### i. Ciclo do Veículo (distância)

É importante observar que cada veículo é associado a um distrito. O veículo inicia a viagem no depósito, desloca-se até a zona a ele associada, faz as entregas e retorna ao depósito quando todos os pontos da zona foram visitados ou quando o tempo que falta para atingir o tempo máximo permitido numa jornada de trabalho for igual ao tempo necessário para retornar ao depósito. Esta sequência determina o ciclo do veículo. O comprimento total do ciclo,  $Dt_i$ , é a soma dos deslocamentos diretos entre depósito e zona,  $D_L$ , e a distância percorrida dentro da zona,  $L_i$ .

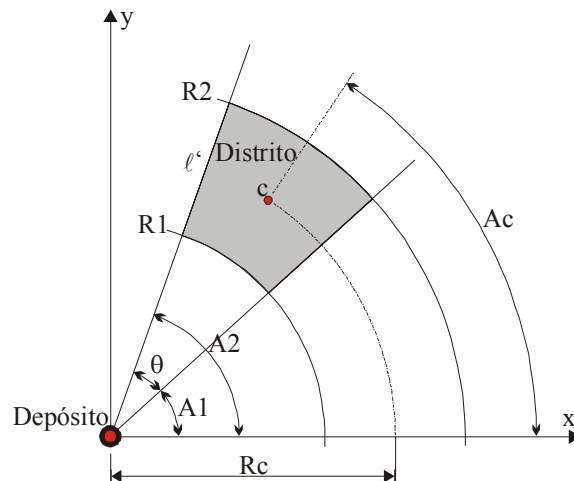
$$Dt_i = 2D_L + L_i \quad (6.1.7)$$

### ii. Adaptação do Fator de Esbeltez

Sendo  $\beta = \ell/\ell'$  o coeficiente de esbeltez de um retângulo, a adaptação à forma polar se dá com base na obtenção de  $\ell$  e  $\ell'$  em relação aos distritos (fig. 6.1.7).

$$\ell' = R2 - R1 \quad (6.1.8)$$

FIGURA 6.1.7 – FATOR DE ESBELTEZ DE UM DISTRITO



$$\theta = A2 - A1 \quad (6.1.9)$$

$$Ac = \frac{A1 + A2}{2} \quad (6.1.10)$$

$$Rc = \frac{R1 + R2}{2} \quad (6.1.11)$$

$$\ell = \theta Rc = \theta \frac{R1 + R2}{2} = (A2 - A1) \frac{R1 + R2}{2} \quad (6.1.12)$$

Logo,  $\beta$  pode ser obtido diretamente de  $\beta = \ell / \ell'$  através da fórmula (6.1.13).

$$\beta = \frac{\theta}{2} \left( \frac{R2 + R1}{R2 - R1} \right) = \frac{A2 - A1}{2} \left( \frac{R2 + R1}{R2 - R1} \right) \quad (6.1.13)$$

Com este novo  $\beta$  é utilizada a fórmula (6.1.5) para a obtenção de  $\rho(n, \beta)$ . Algumas simulações em relação à esbeltez  $\beta$  encontram-se na seqüência deste capítulo.

#### iii. Distância Total Percorrida pelo Veículo

Observando o ciclo do veículo, pode-se reescrever a fórmula (6.1.7) utilizando o  $\rho$  ( $R\hat{O}$ ) na correção da distância.

$$Dt_i = 2R1 + \rho k k' \sqrt{A_i n_i} \quad (6.1.14)$$

#### iv. Tempo Total em todo Percorso

No cálculo do tempo total do ciclo, todos os valores já incluem os fatores de correção aplicados para o cálculo das distâncias. Um exemplo: fator de esbeltez da zona.

O tempo de deslocamento entre o depósito e a zona,  $T_{LH}$ , é dado pela fórmula (6.1.15), onde  $D_L$  é a distância e  $V_L$  a velocidade entre o depósito e a zona.

$$T_{LH} = \frac{D_L}{V_L} \quad (6.1.15)$$

O tempo total dentro da zona,  $T_i$  fórmula (6.1.18), é a soma dos tempos de parada,  $T_p$  (valor obtido diretamente da função para cada distrito) (6.1.16), para efetivar a visita, e o tempo no deslocamento entre visitas,  $T_d$  fórmula (6.1.17), onde  $V_i$  é a velocidade média do veículo dentro da zona de entrega e  $L_i$  é da fórmula (6.1.4), distância total dentro do distrito.

$$T_p = \sum_{j=1}^{n_i} t_j \quad (6.1.16)$$

sendo  $n_i$  o número de pontos no distrito  $i$  e  $t_j$  o tempo de atendimento para cada ponto de distribuição no distrito  $i$ .

$$T_d = \frac{L_i}{V_i} \quad (6.1.17)$$

$$T_i = T_p + T_d \quad (6.1.18)$$

O tempo total do ciclo,  $Tt_i$  fórmula (6.1.19), é a soma dos tempos dos deslocamentos entre depósito e zona e o tempo total dentro da zona.

$$Tt_i = 2T_{LH} + T_i \quad (6.1.19)$$

#### v. Restrições do Problema

As restrições do problema referem-se ao tempo total do ciclo e à capacidade máxima do veículo. Quanto ao tempo,  $Tt_i$  fórmula (6.1.19), este não pode exceder um tempo máximo pré-estabelecido. A carga total que o veículo entrega num ciclo não pode exceder a capacidade máxima de carga do veículo, dada em peso ou volume.

Admitindo que o tempo de ciclo  $i$ ,  $\hat{T}_i$ , não pode exceder a um máximo  $H_1$  de horas de trabalho por dia, imposto pela legislação trabalhista, políticas de empresas, etc. Como o tempo de parada, dado pela fórmula (6.1.16) é obtido diretamente da função, a aproximação do tempo em cada zona  $i$  é dada pela fórmula (6.1.20).

$$\hat{T}_i = Tt_i \leq H_1 \quad (6.1.20)$$

A carga total dentro da zona,  $U_p$  fórmula (6.1.21), é a soma das cargas entregues em cada atendimento. Este valor é obtido diretamente da função dentro de cada distrito.

$$U_p = \sum_{j=1}^{n_i} u_j \quad (6.1.21)$$

sendo  $n_i$  o número de pontos no distrito  $i$  e  $u_j$  a carga entregue em cada ponto de



distribuição deste distrito.

Admitindo que a carga total que um veículo entrega num ciclo  $i$ ,  $\hat{U}_i$ , não pode exceder a um máximo  $W$  de capacidade máxima e como a carga nos pontos de entrega é dada pela fórmula (6.1.21) e obtida diretamente da função, a aproximação da carga em cada zona  $i$  é dada pela fórmula (6.1.22).

$$\hat{U}_i = U_p \leq W \quad (6.1.22)$$

### 6.1.3 Obtenção das Regiões em Relação à Distribuição

Para uma compreensão mais facilitada do desenvolvimento da distribuição, será retomada a parte de introdução do problema.

Em uma determinada região encontram-se clientes distribuídos de forma dispersa que deverão receber cargas específicas de um depósito central. Para fazer estas entregas será obtido um conjunto de rotas para veículos que satisfaça as restrições espaciais e temporais, minimizando o custo total de operação da frota.

Os dados referentes a cada cliente, como identificação, coordenadas, tempo de parada e carga a ser entregue no local, serão lidos de um arquivo.

#### Dados obtidos através das Retículas, dentro da Malha

Uma malha (retículas) será construída sobre a região para servir de base à aproximação da função que fornecerá valores essenciais dentro da distribuição. Estes valores são:

#### Área de cada Distrito ( $A_Z$ )

A área de cada zona,  $A_Z$  fórmula (6.1.23), é obtida diretamente da soma das áreas das retículas,  $Ar_j$ , pertencentes ao distrito.

$$A_Z = \sum_{j=1}^{Nr_i} Ar_j \quad (6.1.23)$$

sendo  $Nr_i$  o número de retículas no distrito  $i$  e  $Ar_j$  a área em  $km^2$  de cada retícula.

### **Carga para cada Distrito ( $U_p$ )**

A carga total dentro de cada zona,  $U_p$  fórmula (6.1.21), é a soma das cargas entregues em cada atendimento.

### **Número de Pontos Atendidos por cada Veículo ( $n_i$ )**

Em cada retícula,  $r_j$ , existe um valor obtido do conjunto de dados que representa a quantidade de atendimento. Se a precisão que o usuário deu ao sistema é razoável, muitas retículas terão este valor nulo, algumas o valor um e raramente algumas com o valor maior que um. Então, para se obter o total de pontos atendidos por cada veículo,  $n_i$  fórmula (6.1.24), basta somar o número de pontos existentes em cada retícula,  $Pr_j$ , pertencentes ao distrito.

$$n_i = \sum_{j=1}^{Nr_i} Pr_j \quad (6.1.24)$$

sendo  $Nr_i$  o número de retículas no distrito  $i$  e  $Pr_j$  o valor equivalente à quantidade de pontos em cada retícula.

### **Tempo Despendido nos Atendimentos em cada Rota ( $T_p$ )**

O tempo despendido nos atendimentos dentro de cada zona,  $T_p$  fórmula (6.1.16), é a soma dos tempos de parada para cada atendimento. Este valor é obtido diretamente da malha de uma forma equivalente à fórmula (6.1.16), mas da mesma forma usada na obtenção do item 3, anterior. São dados pela fórmula (6.1.25).

$$T_p = \sum_{j=1}^{Nr_i} Tr_j \quad (6.1.25)$$

sendo  $Nr_i$  o número de retículas no distrito  $i$  e  $Tr_j$  o valor equivalente ao tempo de parada em cada retícula.

## Construção dos Distritos

Cada retícula da malha é um quadrado de lado (em metros) determinado pelo usuário. O lado dessa retícula terá o valor de acordo com a precisão que o usuário necessita em relação à localização de seus clientes. Estas aproximações têm que apresentar um resultado bom em termos de precisão, mas também têm que compensar em termos de tempo de processamento.

FIGURA 6.1.8 – PRIMEIRO DISTRITO COM RAIO  $R1$  (DEPÓSITO DENTRO DA REGIÃO)

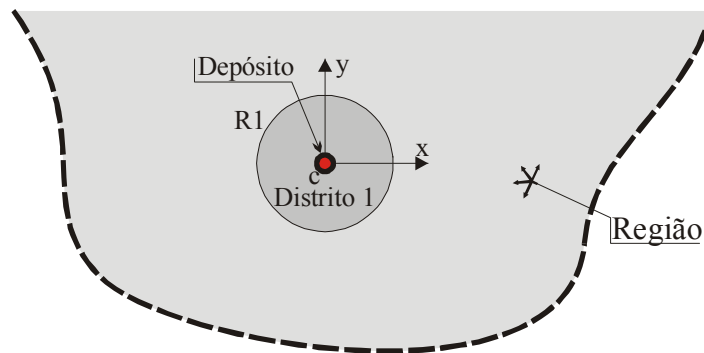
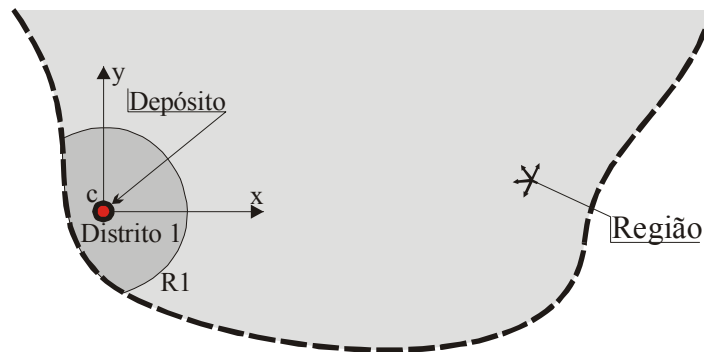


FIGURA 6.1.9 – PRIMEIRO DISTRITO COM RAIO  $R1$  E INTERSEÇÃO COM A FRONTEIRA (DEPÓSITO DENTRO DA REGIÃO)



Para o início da distribuição é importante a posição do depósito. Se ele encontra-se dentro da região de distribuição a primeira zona terá como fronteira um círculo de raio  $R1$  (fig. 6.1.8) ou, além deste círculo, a fronteira do domínio, caso faça interseção com ela (fig. 6.1.9). Caso esteja fora do domínio, o início da distribuição terá como base a distância mínima entre o depósito e o domínio da região (fig. 6.1.10). Caso esta região seja muito alongada, coeficiente de esbeltez não aceitável, serão construídos dois ou mais distritos iniciais (fig. 6.1.11).

Na continuidade de obtenção dos distritos, serão utilizadas distribuições através dos anéis. Em cada anel são determinadas zonas que têm o início no ângulo

$A1$ , fim no ângulo  $A2$  e que são limitadas entre os raios do anel (fig. 6.1.1a). Se a zona tiver interseção com a fronteira do domínio ( $FD$ ), esta fará parte de sua fronteira também (fig. 6.1.1b).

FIGURA 6.1.10 – PRIMEIRO DISTRITO COM RAIO  $R2$  E INTERSEÇÃO COM A FRONTEIRA (DEPÓSITO FORA DA REGIÃO)

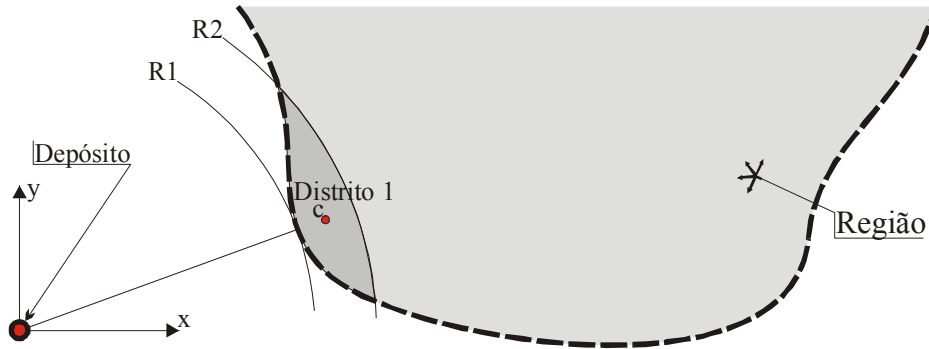
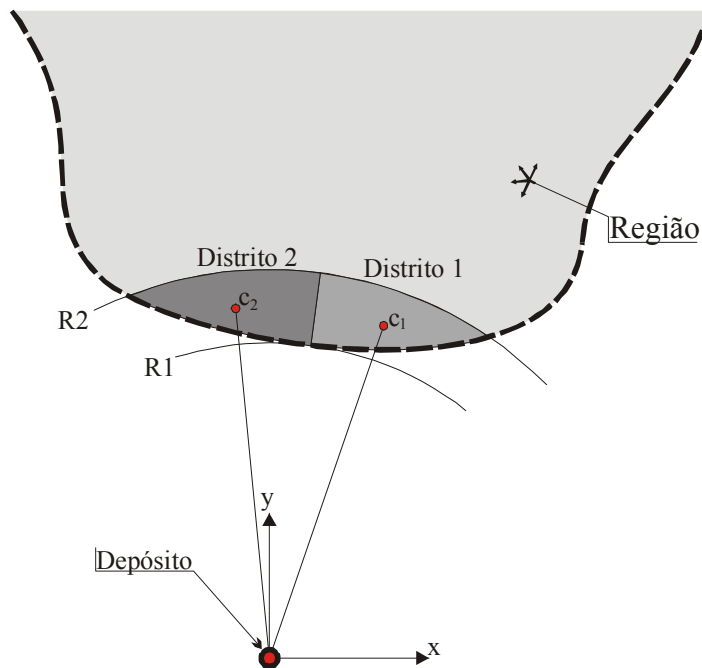


FIGURA 6.1.11 – PRIMEIROS DISTRITOS COM RAIO  $R2$  E INTERSEÇÃO COM A FRONTEIRA (DEPÓSITO FORA DA REGIÃO)



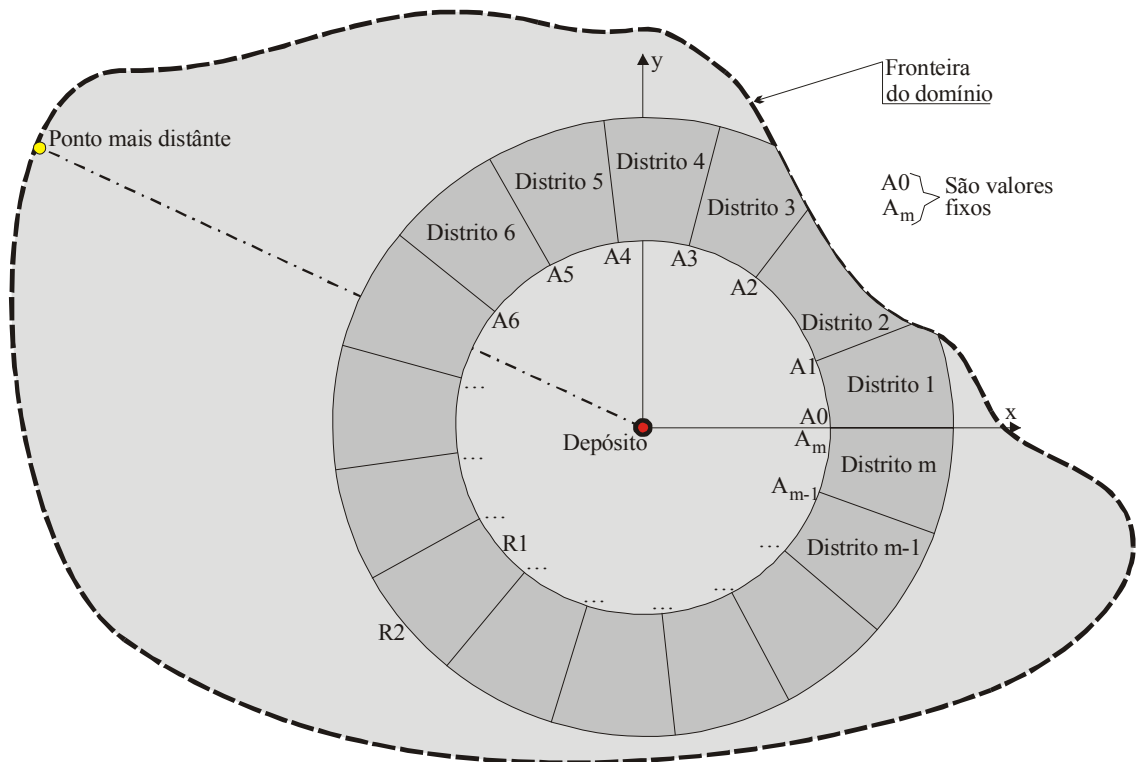
Para cada anel, são determinados os raios  $R1$  e  $R2$ . O raio  $R1$  é igual ao raio  $R2$  do anel anterior. Com base na diferença entre os dois raios do anel anterior e a distância entre o ponto mais distante da região e o depósito, calcula-se o raio  $R2$  da primeira iteração do anel. Cada distrito é obtido alterando-se o ângulo  $A2$  até que este chegue em seu limite, através das restrições (tempo ou carga). Na 1ª iteração, chegando-se ao final do anel, se o valor da última zona for maior que 50% de uma das

restrições, o raio  $R2$  será aumentado e este distrito será a  $m$ -ésima zona do anel, caso contrário, o raio  $R2$  será diminuído e o distrito anterior será a  $m$ -ésima zona do anel. A partir da 2ª iteração o raio  $R2$  será ajustado até que se atinja a convergência dentro do anel, que acontecerá quando a última zona atingir um limite mínimo (fig. 6.1.12).

Enquanto o anel é fechado (fig. 6.1.3), as regiões são calculadas sequencialmente a partir do ângulo zero.

Se o anel é aberto (fig. 6.1.4), as regiões são calculadas sequencialmente a partir da primeira interseção da  $FD$  (fronteira do domínio) com o raio  $R1$ , até a próxima interseção com o mesmo, chegando-se à convergência através de alterações no raio  $R2$ .

FIGURA 6.1.12 – AJUSTES DOS DISTRITOS DENTRO DE UM ANEL



Na obtenção de cada distrito, para se determinar um percurso mínimo em uma área máxima, é importante observar a esbeltez da zona. Foram realizadas algumas simulações aplicando a fórmula  $\rho(n, \beta)$ . No processo,  $\rho$  é um fator multiplicativo que influencia diretamente a obtenção das aproximações das distâncias relativas aos distritos e, com isso, também afeta a obtenção dos tempos. Visando uma melhor comparação para os valores da simulação da aplicação de  $\beta$ , em  $\rho$  serão utilizados os

mesmos valores. São eles:  $n = 80$ ,  $A1 = 30^\circ$ ,  $A2 = 45^\circ$ ,  $R2 = 50$ . A simulação terá como base a variação do raio 1 ( $R1$ ). Revendo as relações (6.1.5) para  $\rho$  e (6.1.13) para  $\beta$ ,

tem-se:  $\rho(n, \beta) = \frac{k_1}{2} \left( 1 + k_2^{\lambda-1} n^{(\lambda-1)k_3} \right)$ , onde  $\lambda = 1/\beta$ ,  $k_1 = 1.0498$ ,  $k_2 = 1.276$  e  $k_3 = -0.05$

e  $\beta = \frac{A2 - A1}{2} \left( \frac{R2 + R1}{R2 - R1} \right)$ , com  $A1$  e  $A2$  utilizados em radiano.

Simulação	$R1$	$R2$	$A1$	$A2$	$n$	$\rho(n, \beta)$
1	5	50	$30^\circ=0.5236\text{rad}$	$35^\circ=0.6108\text{rad}$	80	1.33763
2	10	50	$30^\circ=0.5236\text{rad}$	$35^\circ=0.6108\text{rad}$	80	1.27102
3	15	50	$30^\circ=0.5236\text{rad}$	$35^\circ=0.6108\text{rad}$	80	1.21893
4	20	50	$30^\circ=0.5236\text{rad}$	$35^\circ=0.6108\text{rad}$	80	1.17719
5	25	50	$30^\circ=0.5236\text{rad}$	$35^\circ=0.6108\text{rad}$	80	1.14305
6	30	50	$30^\circ=0.5236\text{rad}$	$35^\circ=0.6108\text{rad}$	80	1.11465
7	35	50	$30^\circ=0.5236\text{rad}$	$35^\circ=0.6108\text{rad}$	80	1.09067
8	40	50	$30^\circ=0.5236\text{rad}$	$35^\circ=0.6108\text{rad}$	80	1.07018
9	45	50	$30^\circ=0.5236\text{rad}$	$35^\circ=0.6108\text{rad}$	80	1.05247
10	46	50	$30^\circ=0.5236\text{rad}$	$35^\circ=0.6108\text{rad}$	80	1.04922

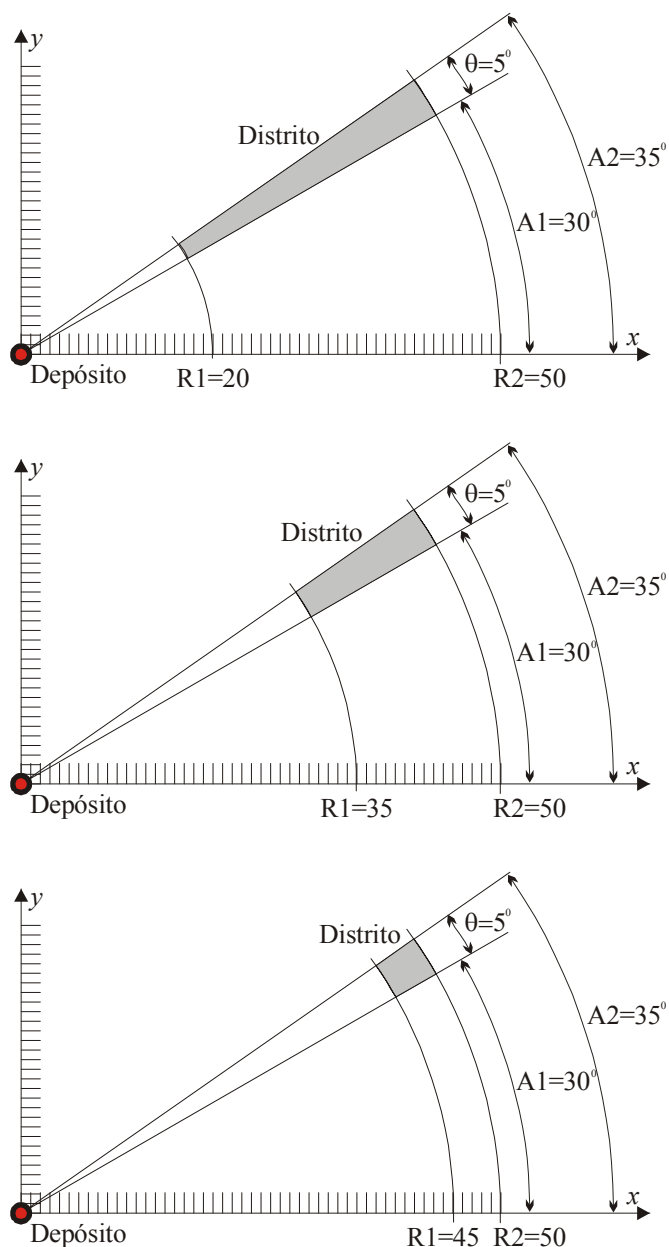
As linhas 4, 7 e 9 sombreadas, estão representadas para a visualização em relação ao formato dos distritos, através da figura (6.1.13).

Neste trabalho será considerada uma faixa desejável de valores para  $\rho(n, \beta)$ . Este intervalo de variação pode ser diferente, dependendo da aplicação. O fator de esbeltez  $\beta$  utilizado para a distribuição polar será também utilizado na distribuição de Voronoi seguindo-se os mesmos padrões polares. Para Voronoi multiplicativo cada distrito é inscrito entre dois raios,  $R1$  e  $R2$  e dois ângulos,  $A1$  e  $A2$ , exatamente como ocorre na divisão polar. Dessa forma, a esbeltez  $\beta$  desta região polar que circunscreve a zona de Voronoi pode ser aplicada em  $\rho(n, \beta)$  para se determinar a aproximação da distância e do tempo em cada distrito.

O intervalo de variação desejável de  $\rho(n, \beta)$  utilizado neste trabalho está entre 1.05 e 1.09, isto é,  $\rho(n, \beta) \in (1.05, 1.09)$ . Em cada zona calculada é aplicado o

coeficiente de esbeltez para se determinar a aproximação da distância total percorrida. Mesmo que a zona esteja fora do intervalo que a considera esbelta, não tem problema, pois o resultado disto no sistema é que a aproximação da distância será um pouco maior com relação a sua densidade em comparação a uma zona mais esbelta.

FIGURA 6.1.13 – FATOR DE ESBELTEZ DE UM DISTRITO

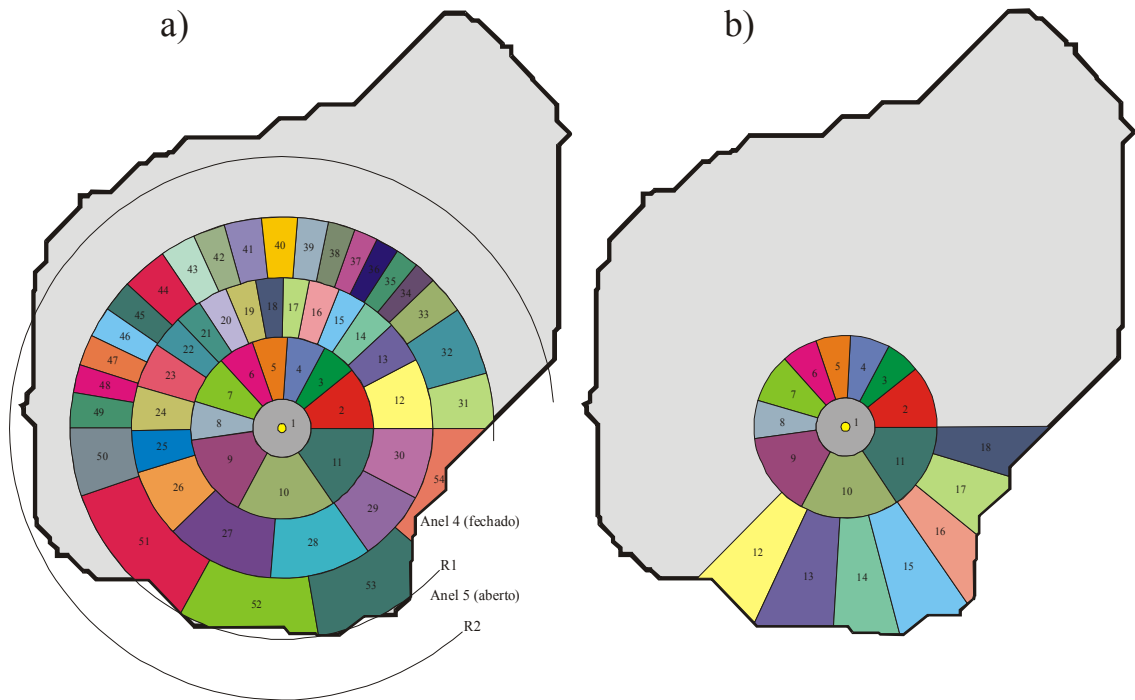


### Constatação em Relação aos Anéis

Quando o 1º distrito tem sua fronteira fazendo interseção com *FD* (fronteira

do domínio) (fig. 6.1.9, 6.1.10 e 6.1.11), todos os anéis que serão utilizados para a distribuição serão do tipo aberto (fig. 6.1.4). Caso contrário, pelo menos um anel será do tipo fechado (fig. 6.1.3).

FIGURA 6.1.14 – CORREÇÃO DA ESBELTEZ DE POSSÍVEIS DISTRITOS ACHATADOS



Quando o anel é aberto e seu antecessor é fechado, todas as interseções do seu raio  $R1$  com a  $FD$  serão analisadas para a identificação de possíveis distritos achatados, caso em que o fator de esbeltez não é bom (fig. 6.1.14a). Neste caso, são fixadas as interseções de  $R1$  com a  $FD$  e se retornam dois anéis para a continuidade de determinação dos distritos (fig. 6.1.14b). A partir deste momento, todos os anéis seguintes serão abertos.

Na continuidade de obtenção das zonas, são determinados os próximos anéis abertos respeitando-se os limites detectados no passo anterior.

Com o objetivo de cobrir toda a região satisfazendo todas as restrições, são analisadas todas as próximas interseções com a  $FD$  (fronteira do domínio), repetindo-se o processo de verificação e de correção de possíveis distritos achatados.

Quando se chegar ao final desta primeira distribuição, as zonas obtidas na região terão um equilíbrio em relação às cargas ou aos tempos. Um exemplo deste tipo de distribuição pode ser observado a seguir (fig. 6.1.15).



Observa-se na distribuição (fig. 6.1.15) que existem algumas zonas extremamente alongadas (Ex: zona 40), onde o fator de esbeltez não é bom. Para esta correção são analisados todos os distritos e aquele em que o fator de esbeltez for considerado ruim será corrigido (fig. 6.1.16).

FIGURA 6.1.15 – FINAL DA DISTRIBUIÇÃO POLAR COM ALGUNS DISTRITOS ALONGADOS

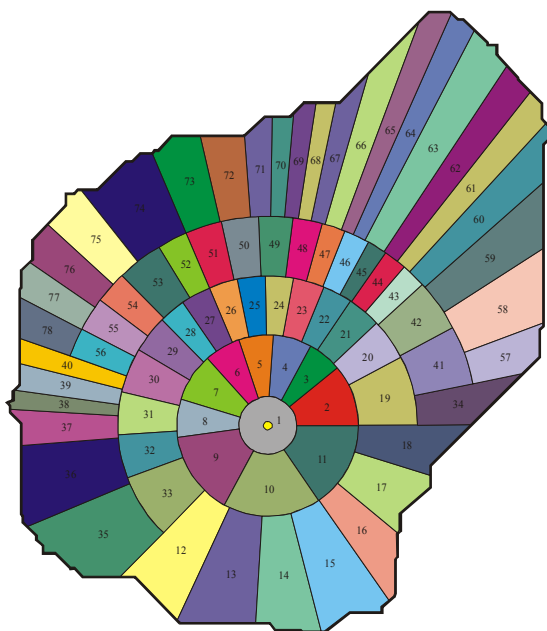
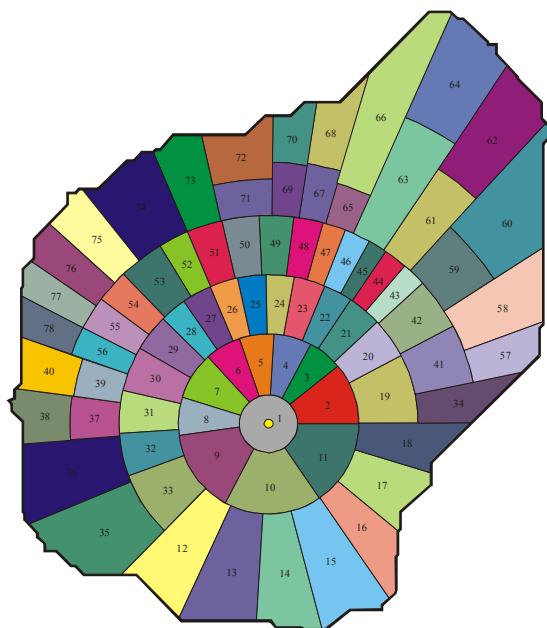


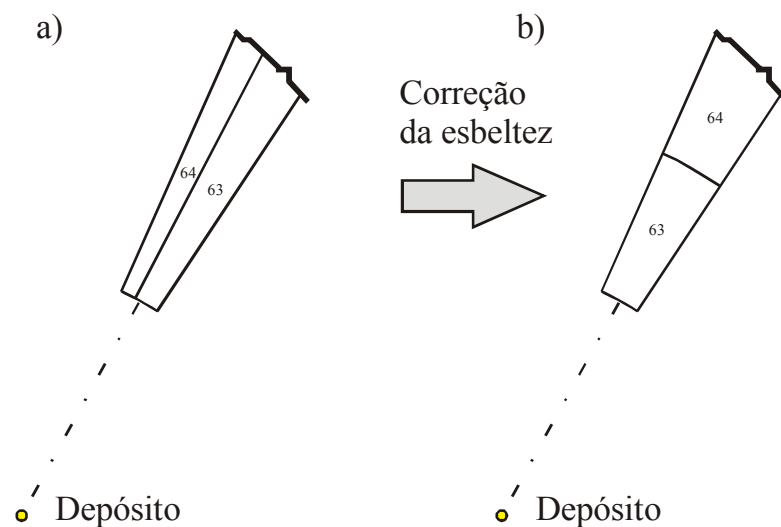
FIGURA 6.1.16 – FINAL DA DISTRIBUIÇÃO POLAR



## Correção da esbeltez

- i. Analisa-se cada distrito obtido da forma polar e calcula-se  $\rho(n, \beta)$  em relação a sua esbeltez  $\beta$ ;
- ii. Todos os distritos onde  $\rho(n, \beta) > 1.09$  são considerados como sendo de esbeltez não desejada;
- iii. Verifica-se se cada distrito não esbelto é contíguo a outro também não esbelto ou próximo à não esbeltez, sendo os dois pertencentes ao mesmo anel;
- iv. Como pertencem ao mesmo anel, mantêm-se os dois raios e elimina-se a fronteira formada por um ângulo que os separam (fig. 6.1.17a);
- v. Uma nova fronteira formada por um raio divide as regiões fundidas, criando assim duas regiões equilibradas e mais esbeltas (fig. 6.1.17b).

FIGURA 6.1.17 – CORREÇÃO DA ESBELTEZ



Logo, concluída a distribuição do sistema através de coordenadas polares, uma outra fase se inicia. A próxima etapa será uma distribuição, baseada na polar, utilizando o diagrama multiplicativo de Voronoi com pesos.

## 6.2 Distribuição do Sistema Através do Diagrama Multiplicativo de Voronoi com Pesos

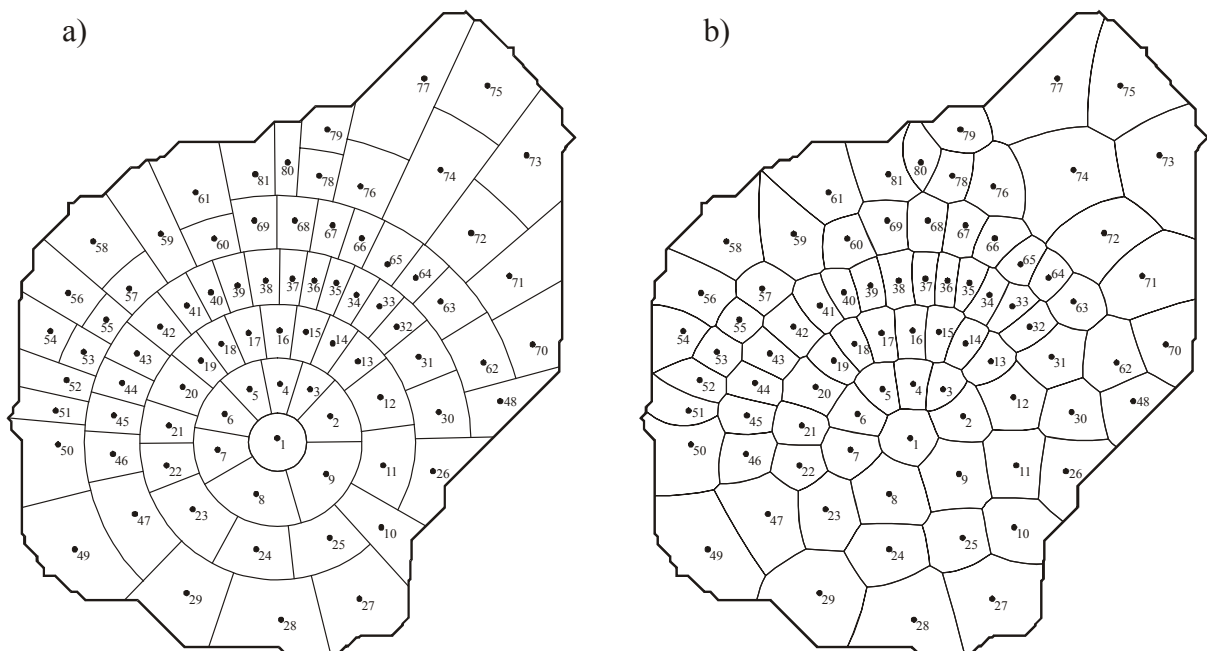
### 6.2.1 Introdução

A distribuição de Voronoi é aplicada sobre a divisão anterior (Divisão Polar). Para isso é necessária a utilização de alguns dados dessa divisão.

São fixados todos os centros dos distritos (zonas) obtidos, os baricentros. Com estes baricentros, Voronoi é aplicado considerando-se as áreas das zonas como pesos iniciais. Para a convergência, existe uma variação dos pesos que é de acordo com a proximidade dos distritos em relação às restrições. No momento em que todas as restrições em todos os distritos (zonas) forem satisfeitas, o processo iterativo de convergência de Voronoi é interrompido.

O desenho seguinte (fig. 6.2.1) mostra um exemplo de aplicação do diagrama de Voronoi sobre uma distribuição da forma polar.

FIGURA 6.2.1 – DETERMINAÇÃO DOS LIMITES DAS ZONAS (FORMA POLAR E FORMA DE VORONOI)



## 6.2.2 Convergência da Distribuição de Voronoi

Os centros dos distritos já foram fixados para a distribuição de Voronoi. São eles:  $P=\{p_1, \dots, p_n\}$  tal que sendo  $n$  o número de zonas a serem delimitadas.

Para a delimitação das zonas com centros  $p_i$ , é necessária a obtenção de um vetor  $W_C=(w_{C1}, \dots, w_{Cn})$ <sup>2</sup> referente aos pesos ligados, em seus elementos respectivos, aos centros  $P$  dos distritos. Logo, procura-se o vetor  $W_C$  que aplicado em  $V_w$  satisfaça as restrições em todas as  $n$  zonas para assim interromper o processo iterativo de convergência de Voronoi.  $V_w$  representa o conjunto dos  $n$  distritos dados pelas relações (6.2.1), (6.2.2) e (6.2.3).

$$V_w=\{V(p_1), \dots, V(p_n)\} \quad (6.2.1)$$

$$V(p_i)=\bigcap_{j=1}^n \text{Dom}(p_i, p_j) \quad (6.2.2)$$

$$\text{Dom}(p_i, p_j)=\{p / d_w(p, p_i) \leq d_w(p, p_j)\} \quad j \neq i. \quad (6.2.3)$$

Ao desmembrar a relação (6.2.3) obtém-se a relação (6.2.4).

$$\text{Dom}(p_i, p_j)=\{x / \frac{1}{w_i} \|x-p_i\| \leq \frac{1}{w_j} \|x-p_j\|\} \quad i \neq j. \quad (6.2.4)$$

Onde  $\text{Dom}(p_i, p_j)$  é a região de domínio de  $p_i$  sobre  $p_j$  através da distância com peso;  $V(p_i)$  é a região de Voronoi por peso associada ao centro  $p_i$ ; e  $V_w$  é o conjunto das  $n$  regiões de Voronoi por peso associado aos pesos  $W_C$ .

Será criada uma seqüência para o desenvolvimento da convergência de Voronoi e, visando melhor visualização, considera-se a seguinte notação:

- $V_0$  é o conjunto das  $n$  regiões de Voronoi associado aos pesos  $W_0$ ;
- $V_k$  é o conjunto das  $n$  regiões de Voronoi associado aos pesos  $W_k$ ;
- $V_C$  é o conjunto das  $n$  regiões de Voronoi associado aos pesos  $W_C$ .

---

<sup>2</sup>  $W_C$  é o vetor de pesos gerado da convergência de Voronoi, iniciado do vetor  $W_0$  que é a área relativa a cada zona calculada da distribuição polar.

Considerando que existe um vetor  $\mathbf{W}_C=(w_{C1},...,w_{Cn})$  tal que  $V_C$  satisfaça a convergência de Voronoi, serão criados dois vetores fundamentais para a obtenção de  $\mathbf{W}_k$  através de  $\mathbf{W}_{k-1}$ , relação (6.2.5).

$$w_{ki} = vpVV(i)_{k-1} * w_{(k-1)i} \quad (6.2.5)$$

sendo  $w_{ki} \in \mathbf{W}_k$ ,  $vpVV(i)_{k-1} \in VV$  (Vetor de Variação Percentual do Peso do Distrito  $i$  em Relação às Restrições). O elemento  $vpVV(i)_{k-1}$ <sup>3</sup> é obtido com relação ao elemento  $vpVI(i)_{k-1} \in VI$ <sup>4</sup> (Vetor de Identificação da Posição do Distrito  $i$  em Relação às Suas Restrições). Os vetores  $VI$  e  $VV$  serão definidos e detalhados um pouco mais adiante.

Para cada  $\mathbf{W}_k$  gerado de  $\mathbf{W}_{k-1}$  é obtido um novo  $V_k$  e então as restrições  $vpVI(i)_k$  são analisadas em cada  $V(p_i)$  com  $i = 1, \dots, n$ . Se  $vpVI(i)_k \leq 1 \ \forall i$ ,  $\mathbf{W}_C = \mathbf{W}_k$ . Lembrando que  $\mathbf{W}_C$  é o vetor peso de convergência de Voronoi.

Logo, a seqüência para o desenvolvimento da convergência de Voronoi será dada através das distâncias entre os vetores peso  $\mathbf{W}_k$  e  $\mathbf{W}_C$  com  $k = 1, \dots, C$ . Dessa forma, os elementos da seqüência nomeada  $X$  serão dados pela relação (6.2.6) e a própria seqüência é representada pela relação (6.2.8).

$$X_k = d(\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_C) \text{ com } k = 1, \dots, C. \quad (6.2.6)$$

$$d(\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_C) = \|\mathbf{W}_C - \mathbf{W}_k\| = \sqrt{(w_{c1} - w_{k1})^2 + \dots + (w_{cn} - w_{kn})^2}. \quad (6.2.7)$$

Pela própria definição da seqüência  $X$ , quando  $k=C$  têm-se  $X_k = 0$ . Daí,  $X$  é dada por  $X_k$  da seguinte forma:

$$X = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_{C-1}, X_C\} \text{ com } X_1 > X_2 > X_3 > \dots > X_{C-1} > X_C = 0. \quad (6.2.8)$$

A seqüência  $X$  é decrescente pela forma como foi ligada aos vetores  $VI$  e  $VV$  definidos na continuidade do trabalho. Se for traçado um limite na seqüência  $X$  quando  $k$  tende para a iteração  $C$ , obtém-se a relação (6.2.9).

<sup>3</sup>  $vpVV(i)_{k-1}$  é o valor de incremento do Vetor de Variação  $VV$  na zona  $i$ .

<sup>4</sup>  $vpVI(i)_{k-1}$  é o valor de posicionamento do Vetor de Identificação  $VI$  na zona  $i$ .

$$\lim_{k \rightarrow C} X_k = 0 \quad (6.2.9)$$

Para a convergência das zonas, existe uma variação dos pesos  $W_k$  que é de acordo com a proximidade dos distritos em relação às restrições. Para a aplicação inicial de Voronoi, é necessária a determinação de um peso inicial  $W_0$ . Para esse problema, o peso inicial utilizado em cada zona é simplesmente sua área com base na distribuição polar.

Após esta aplicação, são determinados os novos distritos  $V(p_i)$  e, naturalmente, vários deles estarão em desacordo com suas restrições. A convergência de Voronoi se dá no momento em que todos os distritos estejam em acordo com suas restrições.

## **Criação dos Vetores para a Convergência de Voronoi**

São criados dois vetores que, com seus valores fixos baseados na distribuição polar, levam a distribuição de Voronoi a sua convergência. Na sequência serão detalhados os passos para a determinação dos vetores.

Os nomes dos vetores utilizados são:

Vetor de Identificação da Posição do Distrito em Relação as Suas Restrições ( $VI$ ).

Vetor de Variação Percentual do Peso do Distrito em Relação às Restrições ( $VV$ ).

1. Determina-se o número de elementos ( $NN$ ), valor par, para a variação do vetor de identificação da posição do distrito em relação as suas restrições. Este valor define a quantidade de elementos dos vetores considerados acima.

Ex.: Tome esse valor como sendo  $NN = 100$ .

2. Obtenção dos parâmetros para o vetor  $VI$  (Identificação da Posição).

- 2.1. Determina-se um valor de dobra ( $vd$ , normalmente  $1,5 \leq vd < 5$ ) que gera o mínimo ( $MinVI$ ) e o máximo ( $MaxVI$ ) elemento significativo do vetor  $VI$ . Ele identifica o menor e o maior valor considerado para uma variável que muda o peso do distrito (zona) para mais ou para menos.

O menor valor ( $MinVI$ ) é calculado obtendo-se o inverso do valor de dobra ( $vd$ ), relação (6.2.10). Para o maior valor ( $MaxVI$ ) basta considerar o próprio valor de dobra ( $vd$ ), relação (6.2.11).

$$MinVI = 1/vd \quad (6.2.10)$$

$$MaxVI = vd \quad (6.2.11)$$

2.2. Calculam-se os passos para valores maiores que 1 ( $pMaxVI$ ) e para valores menores que 1 ( $pMinVI$ ) do vetor  $VI$ . Uma observação importante é que o centro do vetor  $VI$  é o número 1 (um). O primeiro passo é obtido através do quociente da diferença entre o extremo maior e o centro 1 (um) pela metade dos elementos considerados, relação (6.2.12). O segundo passo é obtido através do quociente da diferença entre o centro 1 (um) e o extremo menor pela metade dos elementos considerados, relação (6.2.13).

$$pMaxVI = \frac{MaxVI - 1}{NN/2} \quad (6.2.12)$$

$$pMinVI = \frac{1 - MinVI}{NN/2} \quad (6.2.13)$$

2.3. Para se determinar os elementos do vetor  $VI$ , através dos passos, acha-se o intervalo onde não há variação. Esse intervalo pode ser mudado, conforme a necessidade na utilização do programa. O centro invariável do vetor é no valor 1 (um). Este centro é ampliado conforme o delta valor de variação ( $dvv$ ) passando a ser um intervalo invariável do vetor  $VI$ .

Cálculo do delta valor de variação ( $dvv$ ):

$$dvv = \frac{\sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{LimR_i}{restR_i} \right)}{n} \quad (6.2.14)$$

onde  $LimR_i$  é o valor máximo em relação à restrição na zona  $i$  (tempo ou carga),  $restR_i$  é a restrição (tempo ou carga) da zona  $i$  e  $n$  é o número de zonas na região

de distribuição.

Com esse delta, o valor mínimo ( $MinVI$ ) sofre um decréscimo, conforme a relação (6.2.15).

$$MinVI = 1/vd - dvv \quad (6.2.15)$$

3. Obtenção dos parâmetros para o vetor  $VV$  (Vetor de Variação do Peso).

3.1. Determina-se o valor de variação ( $valv$ , normalmente  $0,01 \leq valv < 0,3$ ) que gera o mínimo ( $MinVV$ ) e o máximo ( $MaxVV$ ) elemento significativo do vetor  $VV$ . Ele identifica o menor e o maior fator percentual considerado para o peso do distrito com relação à iteração seguinte.

O menor valor ( $MinVV$ ) é calculado através da diferença de 1 (um) pelo valor de variação ( $valv$ ) dado acima, relação (6.2.16). O maior ( $MaxVV$ ) é calculado pela soma de 1 (um) com o valor de variação ( $valv$ ), relação (6.2.17).

$$MinVV = 1 - valv \quad (6.2.16)$$

$$MaxVV = 1 + valv \quad (6.2.17)$$

3.2. Calcula-se o passo ( $passoVV$ ) do vetor  $VV$ . No caso deste vetor, só é necessário o cálculo de um passo para valores menores e maiores que 1. Uma observação importante é que o centro do vetor  $VV$  é também o número 1(um), como no item 2.2. O passo é obtido através do quociente da diferença entre os extremos maior ( $MaxVV$ ) e menor ( $MinVV$ ) pelos elementos considerados, relação (6.2.18).

$$passoVV = \frac{MaxVV - MinVV}{NN} \quad (6.2.18)$$

4. Com os parâmetros dos dois vetores já calculados, o próximo passo é a obtenção dos elementos destes vetores. É importante observar que o **valor de identificação da posição mínima** ( $MinVI$ ) será relacionado com o **valor de variação do peso máximo** ( $MaxVV$ ).

4.1. Inicialmente são identificados os primeiros elementos de cada vetor da



seguinte forma: o primeiro elemento do início para o centro e o primeiro elemento do centro para o final dos dois vetores.

4.1.1. Do vetor  $VI$ :

O primeiro elemento ( $eleVI_1$ ) do início para o centro é o seu próprio valor de mudança mínima ( $MinVI$ ), relação (6.2.19).

$$eleVI_1 = MinVI \quad (6.2.19)$$

O primeiro elemento do centro para o final ( $eleVI_{NN/2+1}$ ) do vetor é igual a 1, relação (6.2.20).

$$eleVI_{NN/2+1} = 1 \quad (6.2.20)$$

4.1.2. Do vetor  $VV$ :

O primeiro elemento ( $eleVV_1$ ) do início para o centro é o seu próprio valor de peso máximo ( $MaxVV$ ), relação (6.2.21).

$$eleVV_1 = MaxVV \quad (6.2.21)$$

O primeiro elemento do centro para o final ( $eleVV_{NN/2+1}$ ) do vetor é igual a 1, relação (6.2.22).

$$eleVV_{NN/2+1} = 1 \quad (6.2.22)$$

4.2. A partir dos primeiros elementos de cada vetor, será acrescentado seu passo até a metade da quantidade de elementos determinados, relações (6.2.25 e 6.2.26 para  $VI$ ) e (6.2.27 para  $VV$ ).

Ao vetor  $VI$  será associado o vetor  $VetVI(xx)$  com  $xx=1,...,NN$  (relação 6.2.23), e ao vetor  $VV$  será associado o vetor  $VetVV(yy)$  com  $yy=1,...,NN+1$  (relação 6.2.24).

$$VetVI(xx) = (eleVI_1, \dots, eleVI_{NN/2}, eleVI_{NN/2+1}, \dots, eleVI_{NN}) \quad (6.2.23)$$

onde  $VetVI(i) = eleVI_i$  é o elemento de posição  $i$  do vetor  $VetVI(xx)$ .

$$VetVV(yy) = (eleVV_1, \dots, eleVV_{NN+1}) \quad (6.2.24)$$

onde  $VetVV(i) = eleVV_i$  é o elemento de posição  $i$  do vetor  $VetVV(yy)$ .

Obtenção dos elementos do vetor  $VetVI(xx)$ :

$$VetVI(i) = VetVI(i-1) + pMinVI, \text{ para } (i=2, \dots, NN/2) \quad (6.2.25)$$

$$VetVI(i) = VetVI(i-1) + pMaxVI, \text{ para } (i=NN/2+1, \dots, NN) \quad (6.2.26)$$

Obtenção dos elementos do vetor  $VetVV(yy)$ :

$$VetVV(i) = VetVV(i-1) - passoVV, \text{ para } (i=2, \dots, NN+1) \quad (6.2.27)$$

### **Posicionamento de Cada Zona em Relação ao Vetor $VI$ para o Incremento Obtido do Vetor $VV$**

Com base nos vetores  $VI$  e  $VV$  é aplicado Voronoi multiplicativo com pesos em que é necessário o centro ( $p_i$ ) e o peso ( $w_i$ ) de cada zona ( $V(p_i)$ ). Toma-se como centro o baricentro da zona polar correspondente e como peso a área da zona polar correspondente. São necessárias iterações para se obter a convergência de Voronoi visto que os centros das zonas de Voronoi não se alteram e apenas os pesos iniciais  $W_0$  tem relação com a distribuição do sistema através de coordenadas polares.

O desenvolvimento da convergência de Voronoi é dado a seguir, passo a passo.

1. Com base na área de cada zona  $i$  ( $A_i$ ), é obtido o peso inicial  $W_0$  ( $w_i = Pvor(i)_0$ ) de Voronoi para a primeira iteração (relação 6.2.28) e é aplicado Voronoi multiplicativo em toda a região, obtendo-se novas zonas de distribuição.

$$w_i = Pvor(i)_0 = A_i, \text{ para } (i=1, \dots, n) \quad (6.2.28)$$

Para cada nova zona são calculados o tempo gasto ( $T(i)_k$ ) e a carga total ( $U(i)_k$ ). Com estes dados, calcula-se a razão em relação ao tempo ( $rT(i)_k$ ) que é a divisão do tempo gasto pelo tempo limite ( $T$ ) na zona  $i$ , relação (6.2.29). Também, calcula-se a razão em relação à carga ( $rU(i)_k$ ) que é a divisão da carga total pela carga limite ( $U$ ) na zona  $i$ , relação (6.2.30).

$$rT(i)_k = \frac{T(i)_k}{T}, \text{ para } (i=1, \dots, n) \text{ e } (k=0, \dots, C) \quad (6.2.29)$$

$$rU(i)_k = \frac{U(i)_k}{U}, \text{ para } (i=1, \dots, n) \text{ e } (k=0, \dots, C) \quad (6.2.30)$$

onde  $n$  é o número de zonas obtidas da distribuição do sistema através de coordenadas polares e  $C$  é o número total de iterações suficiente para a convergência do sistema através do diagrama multiplicativo de Voronoi.

Para a obtenção do peso  $k$  na zona  $i$  ( $P_{vor}(i)_k$ ), é utilizada a maior das razões (tempo ou carga) para o cálculo do valor de posicionamento ( $vpVI(i)_k$ ), relação (6.2.31).

$$vpVI(i)_k = \begin{cases} rT(i)_k & , \text{ se } rT(i)_k > rU(i)_k \\ rU(i)_k & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (6.2.31)$$

para  $(i=1, \dots, n)$  e  $(k=0, \dots, C)$ .

2. Verifica-se o valor de posicionamento ( $vpVI(i)_k$ ) em cada zona. Situa-se este valor dentro do vetor  $VI$  e aplica-se ao valor correspondente no vetor  $VV$  para a obtenção do peso  $k$  ( $P_{vor}(i)_k$ ) de Voronoi na zona  $i$ .

2.1. Posicionando cada zona em relação ao vetor  $VI$  ( $vpVI(i)_k$ ) para o incremento que é obtido no vetor  $VV$  ( $vpVV(i)_k$ ).

Para as 3 relações seguintes, os valores de  $posi$ ,  $i$  e  $k$  variam da seguinte forma:

( $posi=2, \dots, NN$ ), sendo  $NN$  o número de elementos dos vetores  $VI$  e  $VV$ ;

( $i=1, \dots, n$ ), sendo  $n$  o número de zonas de distribuição do sistema;

( $k=0, \dots, C$ ), sendo  $C$  o número total de iterações suficiente para a convergência do sistema.

$$[vpVI(i)_k \leq VetVI(1)] \rightarrow [vpVV(i)_k = VetVV(1)] \quad (6.2.32)$$

$$[VetVI(posi - 1) < vpVI(i)_k \leq VetVI(posi)] \rightarrow [vpVV(i)_k = VetVV(posi)] \quad (6.2.33)$$

$$[vpVI(i)_k > VetVI(NN)] \rightarrow [vpVV(i)_k = VetVV(NN+1)] \quad (6.2.34)$$

Com o valor de incremento ( $vpVV(i)_{k-1}$ ) em relação ao vetor  $VV$  já definido, calcula-se o peso  $k-1$  ( $Pvor(i)_{k-1}$ ) de Voronoi que será aplicado na iteração  $k$ , relação (6.2.35).

$$Pvor(i)_k = vpVV(i)_{k-1} * Pvor(i)_{k-1}, \text{ para } (i=1, \dots, n) \text{ e } (k=1, \dots, C) \quad (6.2.35)$$

Esta mesma relação já foi dada pela relação (6.2.5), já que  $w_{ki}=Pvor(i)_k$ , com  $w_{ki} \in W_k$  (6.2.35) pode ser representada pela relação (6.2.36).

$$w_{ki} = vpVV(i)_{k-1} * w_{(k-1)i} \quad (6.2.36)$$

### Convergência de Voronoi em Relação aos Vetores $VI$ e $VV$ .

A convergência de Voronoi se dá logo que o valor de posicionamento ( $vpVI(i)_k$ ) seja menor ou igual a 1 (um), para todo  $i$  variando do primeiro ao último distrito para a  $k$ -ésima iteração, relação (6.2.37).

$$[vpVI(i)_k \leq 1, \forall i / i=1, \dots, n] \rightarrow [(k=C) \text{ com restrições satisfeitas}] \quad (6.2.37)$$

$k=C$  é o valor referente à convergência da iteração final.

Para o dimensionamento de sistemas de distribuição através do diagrama multiplicativo de Voronoi com pesos sabe-se que, pelas definições utilizadas neste trabalho, este dimensionamento ocorre dentro de uma área limitada. As restrições em  $V_k$  são dadas através de funções de aproximação contínua por splines que consideram a carga e o tempo em cada  $V(p_i) \in V_k$ . Estas funções são definidas em um conjunto limitado e fechado, portanto um conjunto compacto. Para que Voronoi tenha uma convergência, basta exibir uma seqüência monótona decrescente. Esta seqüência será dada pela distância  $X_k$  definida entre  $W_k$  e  $W_C$ .

Como foi visto, os vetores  $VI$  e  $VV$  são definidos adequadamente e, com isso, será provado mais adiante que existe um valor  $C$  para a iteração final de convergência de tal forma a se obter o vetor peso  $W_C$  que leva a distribuição ao equilíbrio.

Considerando os pesos iniciais  $W_0$ , existe uma seqüência  $W$ , relação (6.2.38), que, através dos vetores  $VI$  e  $VV$ , leva a obtenção do vetor peso de convergência  $W_C$  já

que  $\mathbf{W}_k \in \mathbf{W}$  é calculado recorrendo-se ao vetor  $\mathbf{W}_{k-1}$ , relação (6.2.36).

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_{C-1}, \mathbf{W}_C\} \quad (6.2.38)$$

O desenvolvimento das considerações pode ser observado a seguir:

A prova de que  $\mathbf{W}$  é uma seqüência convergente será obtida mostrando-se que ela é monótona por elemento e limitada, onde monótona por elemento significa que cada  $w_{ki} \in \mathbf{W}_k$  é não crescente ou não decrescente.

Para a convergência de  $\mathbf{W}$  tem-se:

$$\mathbf{W}_k \rightarrow \mathbf{W}_C \text{ quando } k \rightarrow C$$

$$(w_{k1}, \dots, w_{kn}) \rightarrow (w_{C1}, \dots, w_{Cn}) \text{ quando } k \rightarrow C$$

Tome um elemento geral  $w_{ki} \in \mathbf{W}_k$  que é obtido da relação (6.2.36):

$$w_{ki} = vpVV(i)_{k-1} * w_{(k-1)i}$$

Como foi visto através dos vetores  $VI$  e  $VV$ , existem três possibilidades para o valor de  $vpVV(i)_{k-1}$ :

1. Se  $vpVI(i)_{k-1} > 1$                       então       $vpVV(i)_{k-1} < 1$
2. Se  $(1-dvv) \leq vpVI(i)_{k-1} \leq 1$     então       $vpVV(i)_{k-1} = 1$
3. Se  $vpVI(i)_{k-1} < 1-dvv$               então       $vpVV(i)_{k-1} > 1$

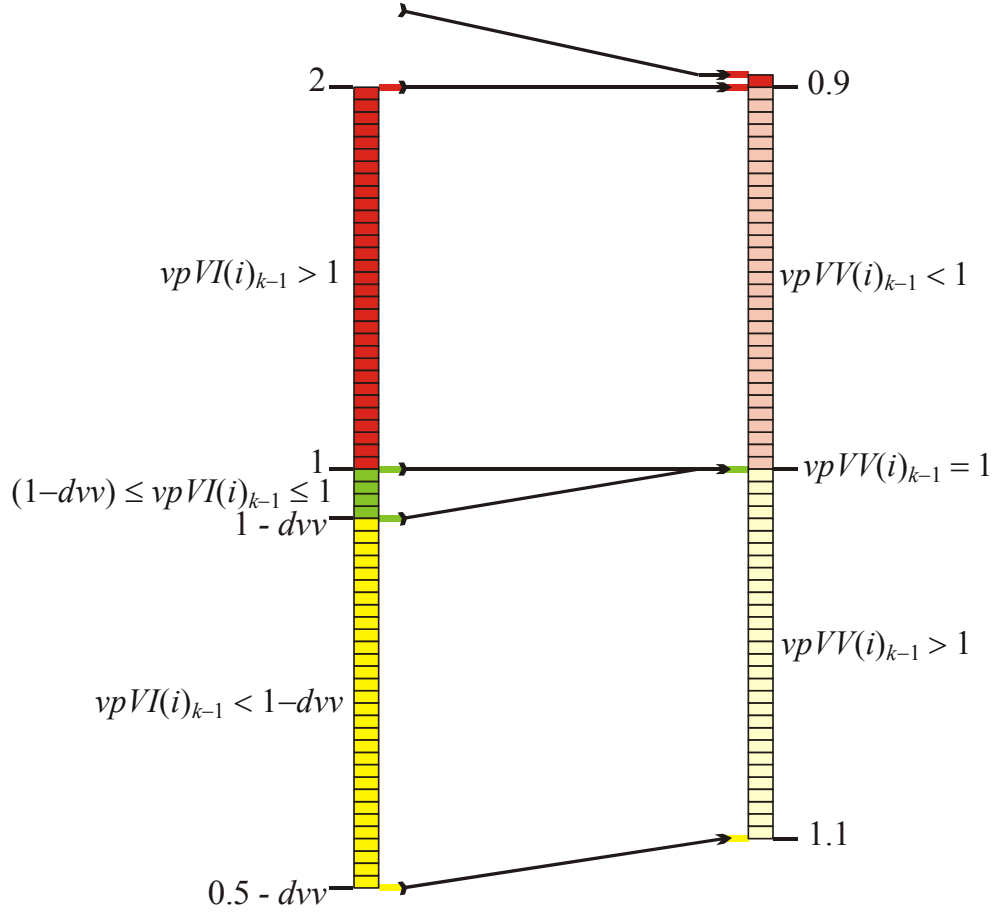
sendo que  $dvv$  dado pela relação (6.2.14) é o delta valor de variação, valor que dá uma folga no sistema de distribuição de Voronoi através do vetor  $VI$  pelo elemento  $vpVI(i)_{k-1} \in VI$  que identifica  $vpVV(i)_{k-1} \in VV$ . O valor  $dvv$  é obtido após a distribuição polar.

$$dvv = \frac{\sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{LimR_i}{restR_i} \right)}{n}$$

onde  $LimR_i$  é o valor máximo em relação à restrição na zona  $i$  (tempo ou carga),

$restR_i$  é a restrição (tempo ou carga) da zona  $i$  e  $n$  é o número de zonas na região de distribuição.

FIGURA 6.2.2 – RELAÇÃO ENTRE OS VETORES  $VI$  E  $VV$ .



Os extremos do vetor  $VI$  são calculados das relações (6.2.11) e (6.2.15) que são  $MaxVI = vd$  e  $MinVI = 1/vd - dvv$  ( $vd$ , normalmente  $1,5 \leq vd < 5$ ). Na figura 6.2.2  $vd = 2$ .

Os extremos do vetor  $VV$  são calculados das relações (6.2.16) e (6.2.17) que são  $MinVV = 1 - valv$  e  $MaxVV = 1 + valv$  ( $valv$ , normalmente  $0,01 \leq valv < 0,3$ ). Na figura 6.2.2  $valv = 0,1$ .

Considerando a possibilidade (1) tem-se que  $vpVV(i)_0 < 1$ . Os pesos  $w_{ki}$  com  $k = 1, \dots, C$  formam uma sequência monótona não crescente, isto é,  $w_{0i} \geq w_{1i} \geq w_{2i} \geq \dots \geq w_{(C-1)i} \geq w_{Ci}$ , pois  $w_{ki} = vpVV(i)_{k-1} * w_{(k-1)i}$  e  $vpVV(i)_{k-1} \leq 1$ .

Como esta sequência é limitada, pois está compreendida entre 0 e  $w_{0i}$ , um teorema clássico da análise matemática garante que ela é convergente. Tal teorema

afirma que uma seqüência monótona e limitada é convergente.

Considerando a possibilidade (3) tem-se que  $vpVV(i)_0 > 1$ . Neste caso os pesos  $w_{ki}$  com  $k = 1, \dots, C$  formam uma seqüência monótona não decrescente, isto é,  $w_{0i} \leq w_{1i} \leq w_{2i} \leq \dots \leq w_{(C-1)i} \leq w_{Ci}$ , pois  $w_{ki} = vpVV(i)_{k-1} * w_{(k-1)i}$  e  $vpVV(i)_{k-1} \geq 1$ .

Esta seqüência também é limitada e, pelo mesmo teorema citado acima, é convergente.

Considerando a possibilidade (2) tem-se que  $vpVV(i)_0 = 1$ . Neste caso os pesos  $w_{ki}$  com  $k = 1, \dots, C$  formam uma seqüência monótona que pode se manter constante ou  $vpVI(i)_{k-1}$  pode estar próximo aos extremos do intervalo de folga  $[(1-dvv), 1]$ , o que pode levar ao caso (1) ou ao caso (3). Da mesma forma, conclui-se que esta seqüência também é convergente.

Como  $X_k = d(W_k, W_C) = \|W_C - W_k\|$ , relação (6.2.8), segue que:

$$\lim_{k \rightarrow C} X_k = 0$$

A seqüência  $X = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_{C-1}, X_C\}$  está ligada diretamente à seqüência  $W$  com  $k = 1, \dots, C$ . Como a seqüência  $W$  é monótona por elemento e também convergente, a seqüência  $X$  é monótona decrescente convergente para 0.

A título de observação, será mostrada a obtenção de  $W_C$  em função de  $W_0$  chegando à relação (6.2.39).

$$k = 1 \quad w_{1i} = vpVV(i)_0 * w_{0i}$$

$$k = 2 \quad w_{2i} = vpVV(i)_1 * w_{1i}$$

$$= vpVV(i)_1 * \overbrace{vpVV(i)_0 * w_{0i}}^{w_{1i}}$$

$$= \overbrace{vpVV(i)_1 * vpVV(i)_0}^{\downarrow} * w_{0i}$$

$$\begin{array}{ccc}
& & \downarrow \\
k=2 & w_{2i} = \prod_{k=0}^1 \overbrace{vpVV(i)_k} & * w_{0i} \\
\vdots & \vdots & \\
k=C & w_{Ci} = \prod_{k=0}^{C-1} vpVV(i)_k * w_{0i} \text{ tal que } i = 1, \dots, n. & (6.2.39)
\end{array}$$

Desta forma, qualquer elemento do vetor  $\mathbf{W}_C$  pode ser obtido em correspondência ao elemento do vetor inicial  $\mathbf{W}_0$ . De acordo com a folga no sistema, os elementos deste produtório são maiores ou iguais a um ou menores ou iguais a um ( $\geq 1$  ou  $\leq 1$ ). Se forem maiores ou iguais a um, a seqüência é não decrescente, se forem menores ou iguais a um, a seqüência é não crescente.



## 7 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

### 7.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentados os resultados da aplicação do programa a um conjunto de clientes dentro da cidade de São Paulo, Brasil. O objetivo é fazer a distribuição de materiais de um único depósito, com veículos homogêneos, para 6.385 clientes espalhados por toda a cidade. Inicialmente é feita a leitura em um arquivo, dos seguintes dados, referentes a estes clientes: 1) Coordenadas geográficas (localização do cliente); 2) Total de carga a ser entregue ao cliente; 3) Tempo total despendido para o atendimento ao cliente.

Após a leitura dos dados, o algoritmo determina os seguintes dados, em relação à distribuição de produtos, a partir de um depósito central:

- Número de zonas de distribuição (para cada zona, um veículo);
- O tempo total gasto pelo condutor desde a saída até a volta do veículo para o depósito;
- A carga total transportada pelo veículo para cobrir toda a zona;
- A distância total percorrida pelo veículo (depósito-zona-depósito);
- Quantidade de clientes que serão atendidos em cada zona.

O algoritmo foi programado na linguagem Visual Basic 6.0 e o processamento foi efetuado em um computador portátil “*intel inside – pentium 3*” 1000 Mhz, com 384 Mb de memória *RAM*.

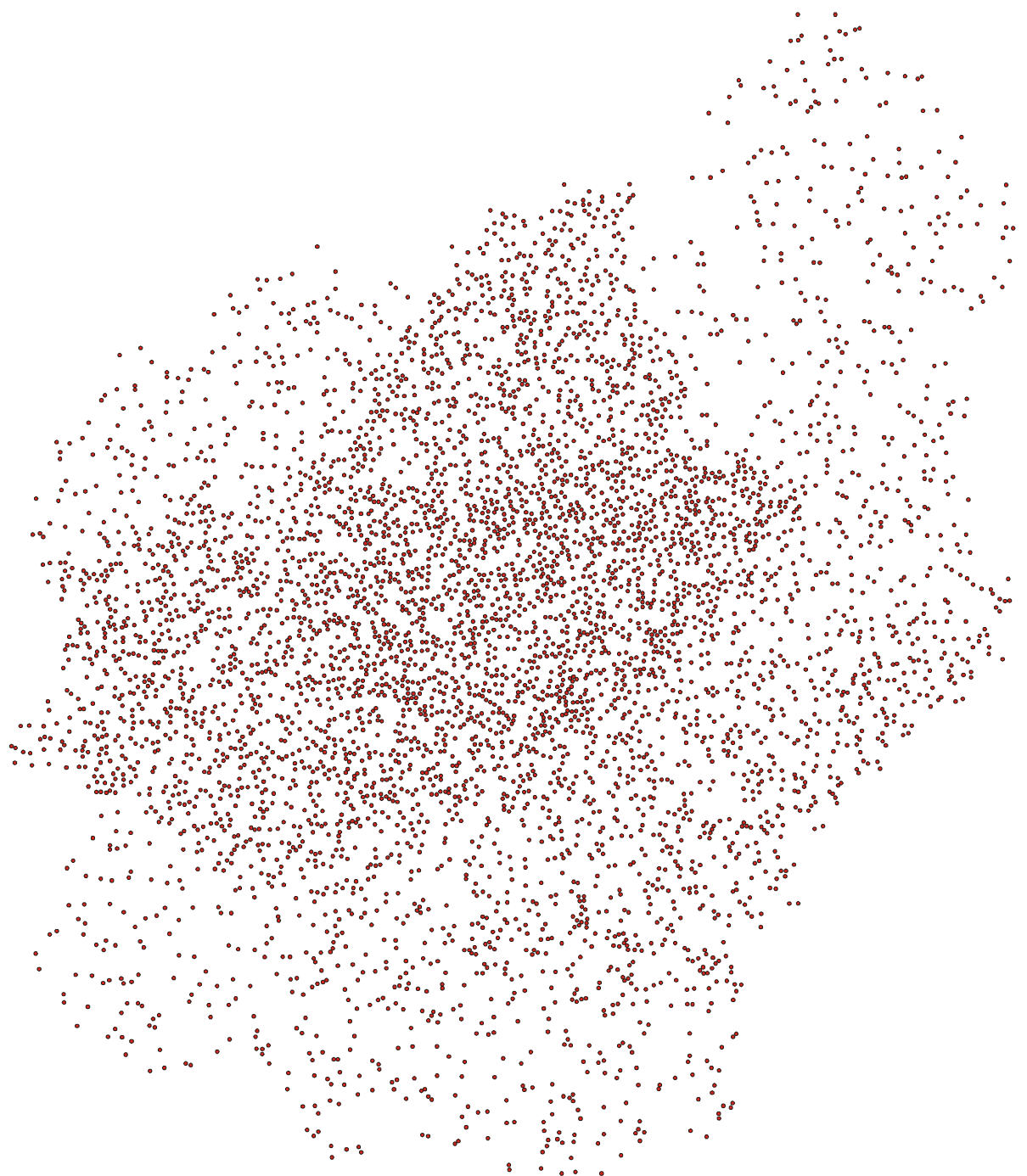
Como é feita a discretização do espaço contínuo, a precisão da distribuição está diretamente relacionada com a dimensão da retícula da malha. Esta retícula é determinada de acordo com as necessidades da empresa.

Na sequência, são apresentados três exemplos com diferentes retículas. No item 7.2 são mostrados os pontos de distribuição, no item 7.3 é desenvolvido um exemplo passo a passo, no item 7.4, 7.5 e 7.6 são apresentados exemplos com retícula de dimensão de 35 metros, 138 metros e 196 metros respectivamente.

## 7.2 Distribuição Espacial dos Pontos de Atendimento

Em cada pontos tem-se: localização, carga e tempo de atendimento.

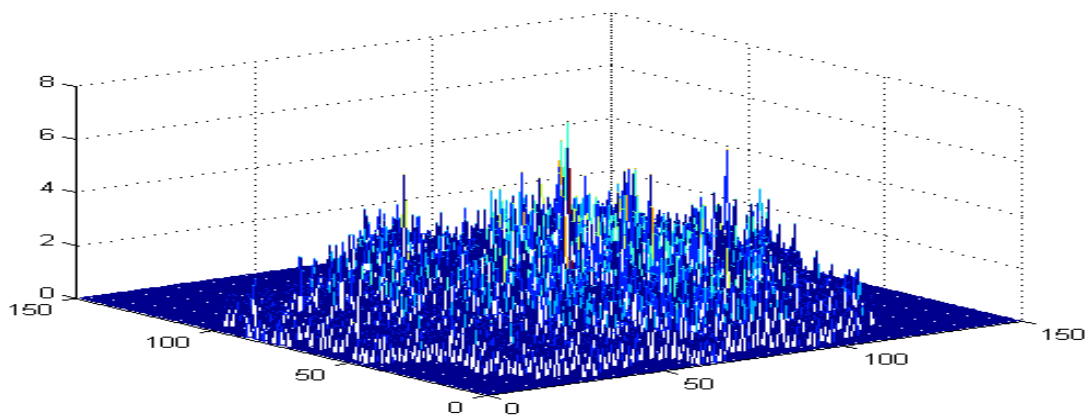
FIGURA 7.2.1 – PONTOS DE ATENDIMENTO (6385 CLIENTES)



### 7.3 Gráfico da Aproximação por Splines em uma Malha com retículas de 200 metros

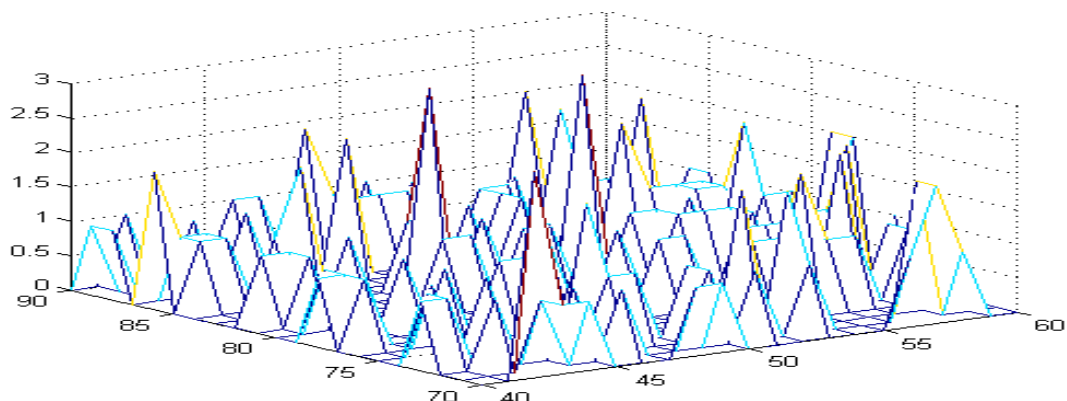
O gráfico a seguir é uma aproximação referente aos pontos da figura 7.2.1. Como o conjunto de valores sobre a área de distribuição é esparso, o gráfico referente à aproximação por Spline (fig. 7.3.1) apresenta picos com relação aos valores significativos, já que a maioria dos valores em volta desses picos são zerados.

FIGURA 7.3.1 – GRÁFICA DE APROXIMAÇÃO DA DENSIDADE DA ÁREA POR SPLINES



Para se observar melhor o comportamento da aproximação por Splines com a representação dos valores nas retículas da malha, a figura 7.3.2 mostra uma parte desta aproximação no intervalo  $[70,90] \times [40,60]$  da malha.

FIGURA 7.3.2 – VISÃO PARCIAL DA APROXIMAÇÃO POR SPLINES EM RETÍCULAS DE 200 METROS



O intervalo referente ao gráfico da figura 7.3.2 representa uma parte da área de distribuição com densidade alta em relação às outras, mesmo assim, notam-se várias retículas zeradas em volta dos picos com valores significativos.

## 7.4 Seqüência de Determinação dos Distritos (Zonas)

Resultados visuais, com a determinação das zonas, passo a passo.

FIGURA 7.4.1 – FRONTEIRA

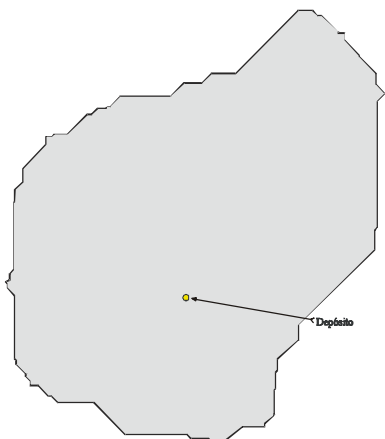


FIGURA 7.4.4 – ANEL 3

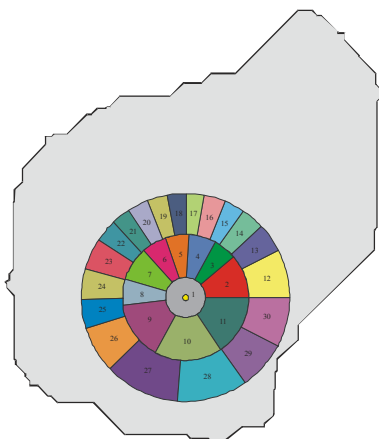


FIGURA 7.4.7 – ANEL 3

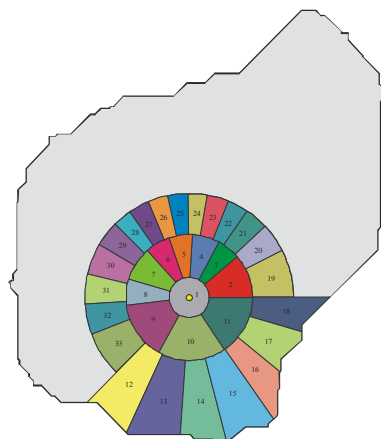


FIGURA 7.4.2 – ANEL 1

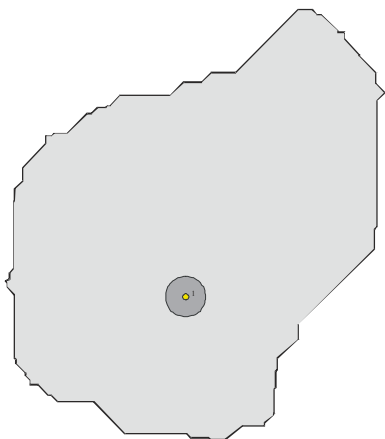


FIGURA 7.4.5 – ANEL 4

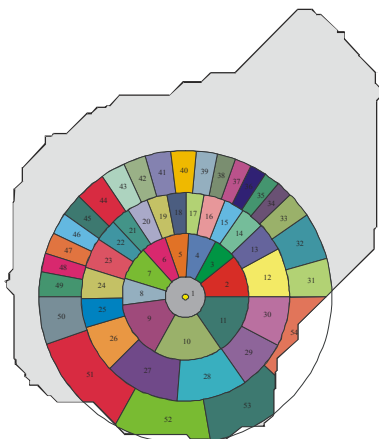


FIGURA 7.4.8 – ANEL 4

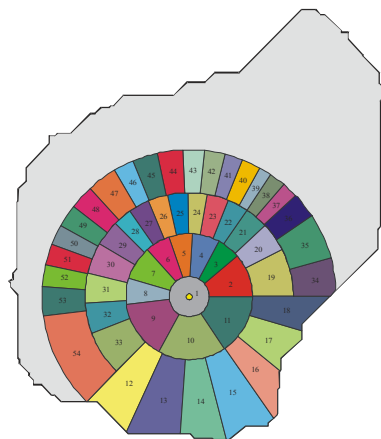


FIGURA 7.4.3 – ANEL 2

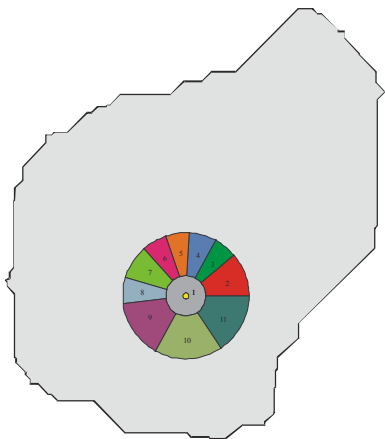


FIGURA 7.4.6 – RETORNO ANEL 3

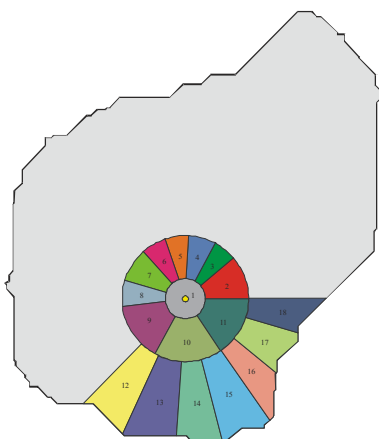


FIGURA 7.4.9 – ANEL 5

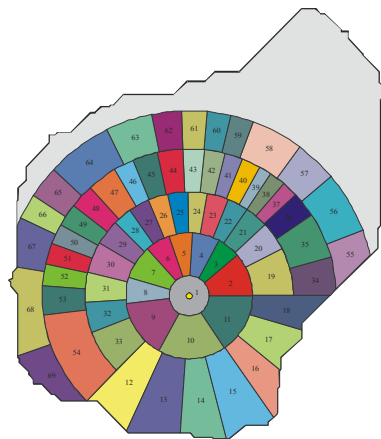


FIGURA 7.4.10 –RETORNO ANEL 4

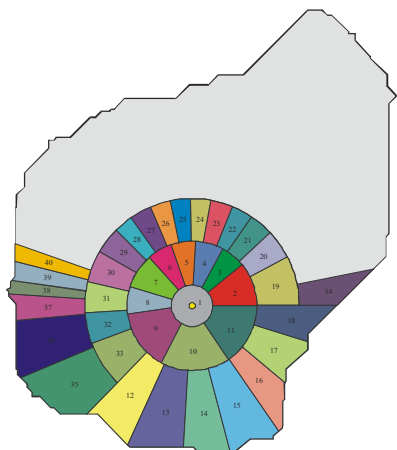


FIGURA 7.4.12 – ANEL 5

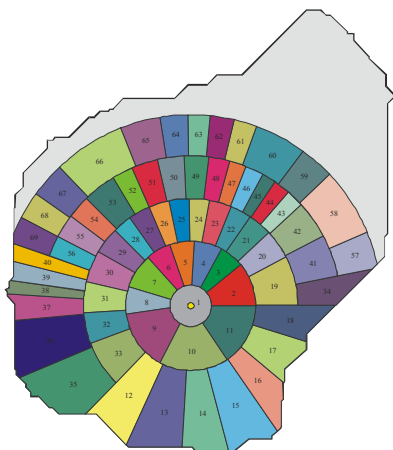


FIGURA 7.4.14 –RETORNO ANEL 5

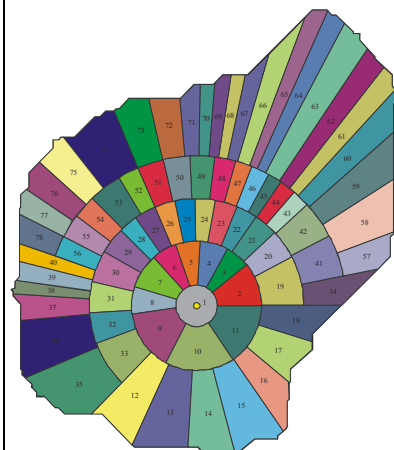


FIGURA 7.4.11 – ANEL 4

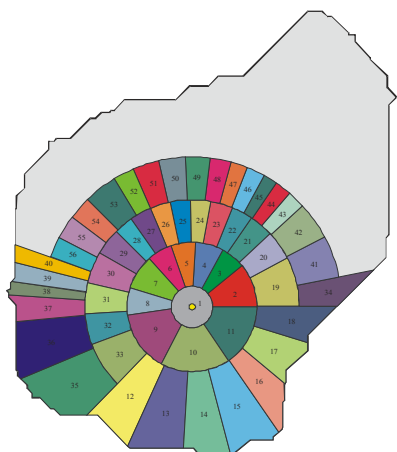


FIGURA 7.4.13 – ANEL 6

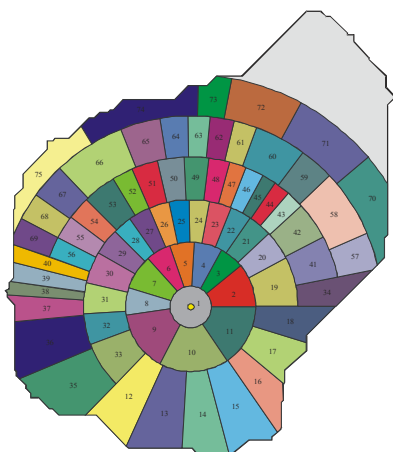


FIGURA 7.4.15 – ACERTO ESBELTEZ

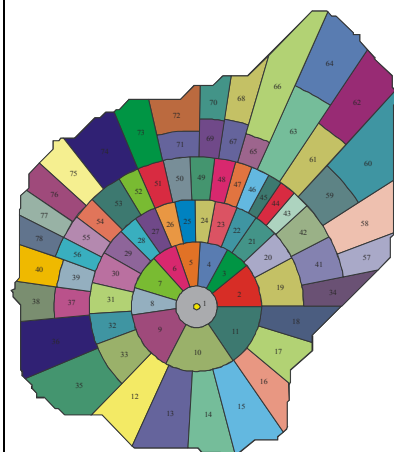


FIGURA 7.4.16 – DIAGRAMA DE VORONOI

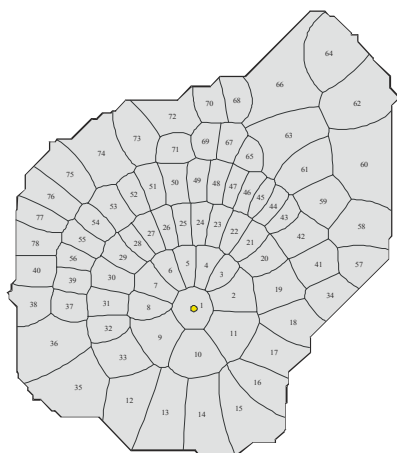
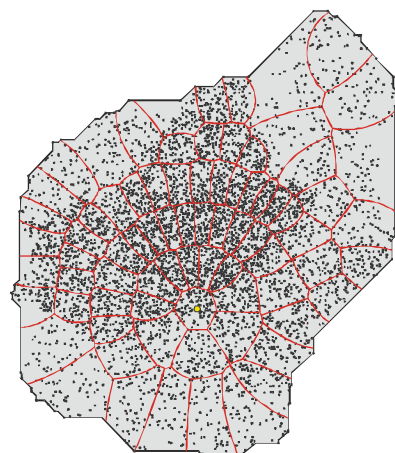


FIGURA 7.4.17 – DENSIDADE NAS ZONAS

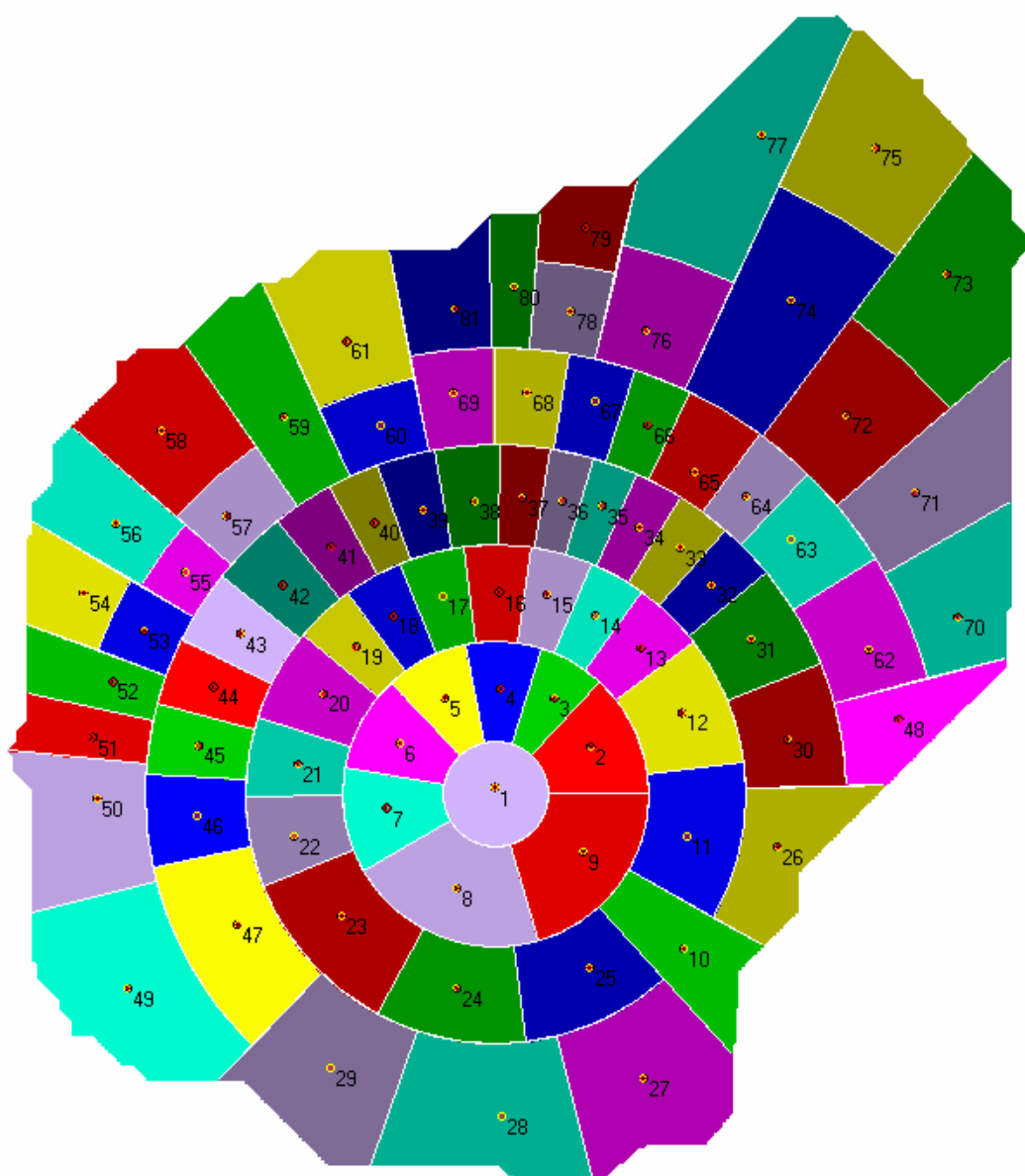


## 7.5 Aplicação do Algoritmo com Retículas de Dimensão de 35 Metros

Os valores da malha com retículas de dimensão de 35 metros foram obtidos a partir da spline por uma malha com retículas de dimensão de 138 metros.

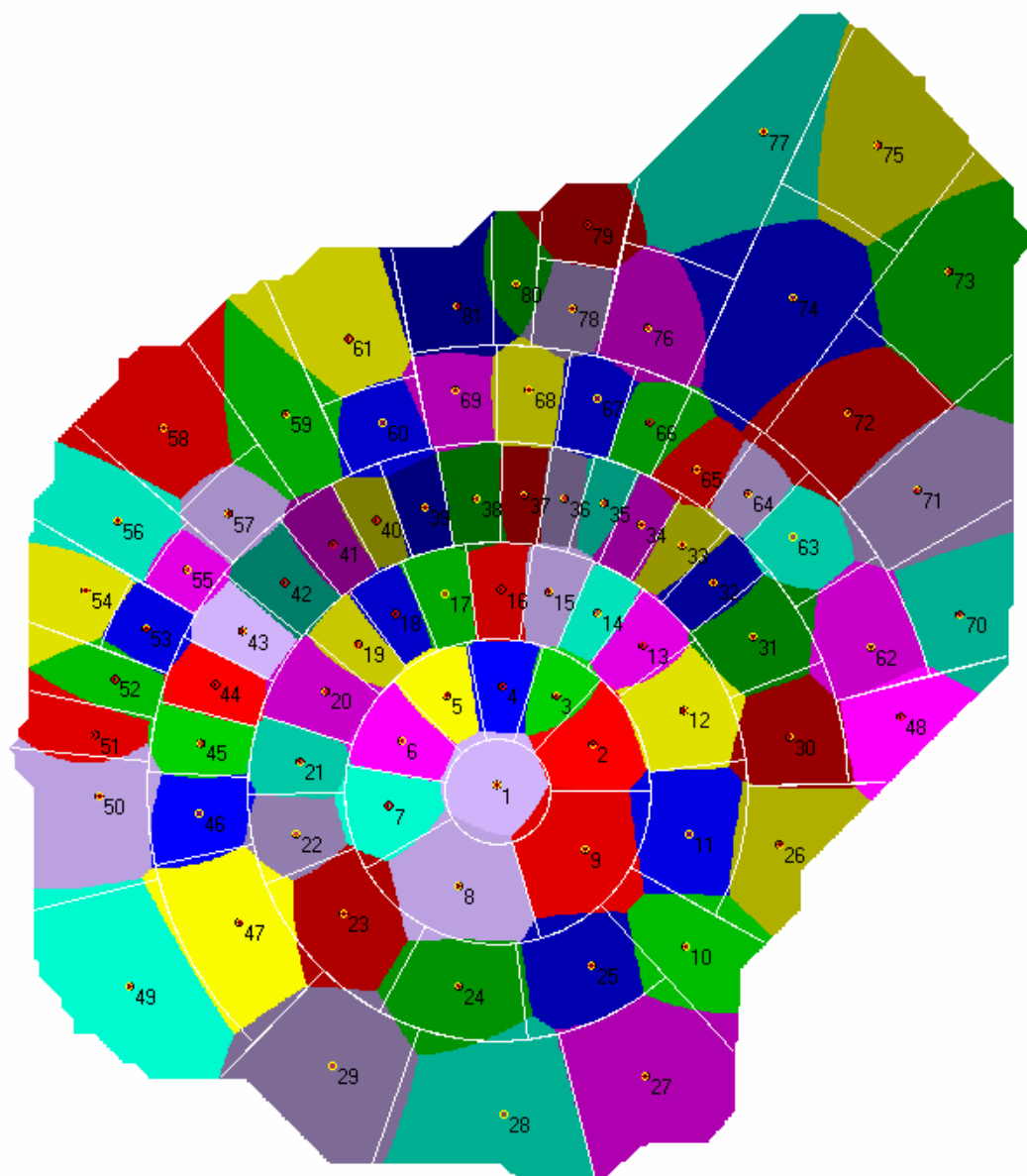
### 7.5.1 Resultado Gráfico da Divisão Polar (35 Metros)

FIGURA 7.5.1 – DIVISÃO POLAR COM A DETERMINAÇÃO DOS BARICENTROS



## 7.5.2 Resultado Gráfico da Divisão de Voronoi (35 Metros)

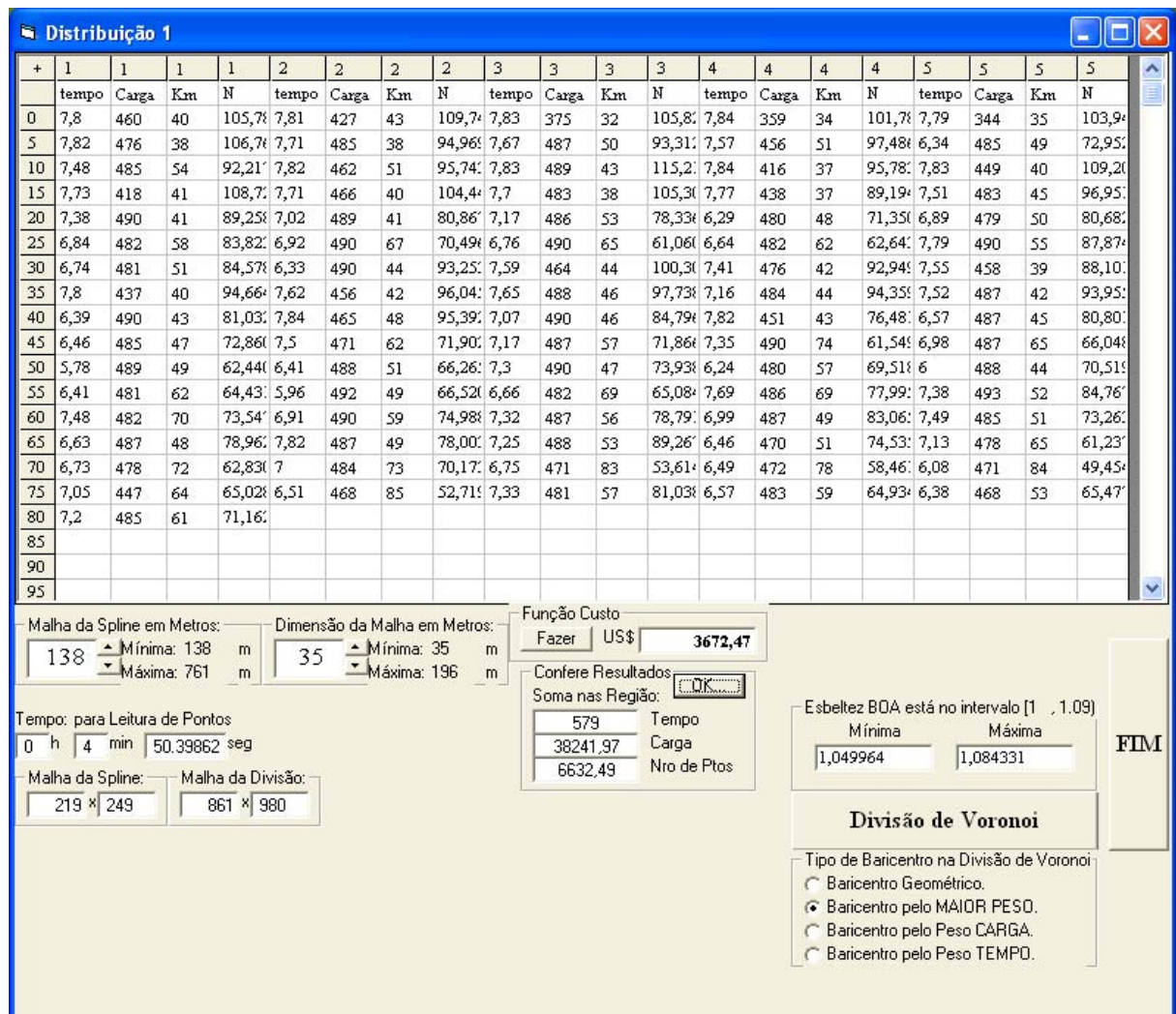
FIGURA 7.5.2 – DIVISÃO DE VORONOI COMPARADA À DIVISÃO POLAR





### 7.5.3 Valores Obtidos para a Divisão Polar (35 Metros)

FIGURA 7.5.3 – RESULTADOS EM CADA DISTRITO: TEMPO, CARGA, DISTÂNCIA E ATENDIMENTO



### Interpretação dos Valores da Figura 7.5.3

Em cada linha do quadro estão representados valores equivalentes a cinco zonas. Estes valores estão agrupados 4 a 4, sendo eles: Tempo total gasto no distrito; Carga transportada pelo caminhão; Distância em quilômetro percorrida pelo caminhão desde a saída do depósito, entrega na zona, até a volta ao depósito; Número de clientes atendidos.

Assim, na linha “0” têm-se os valores equivalentes às zonas de 1 a 5. Na linha “5” soma-se 5 ao número representado na linha “+” do distrito, obtendo-se então



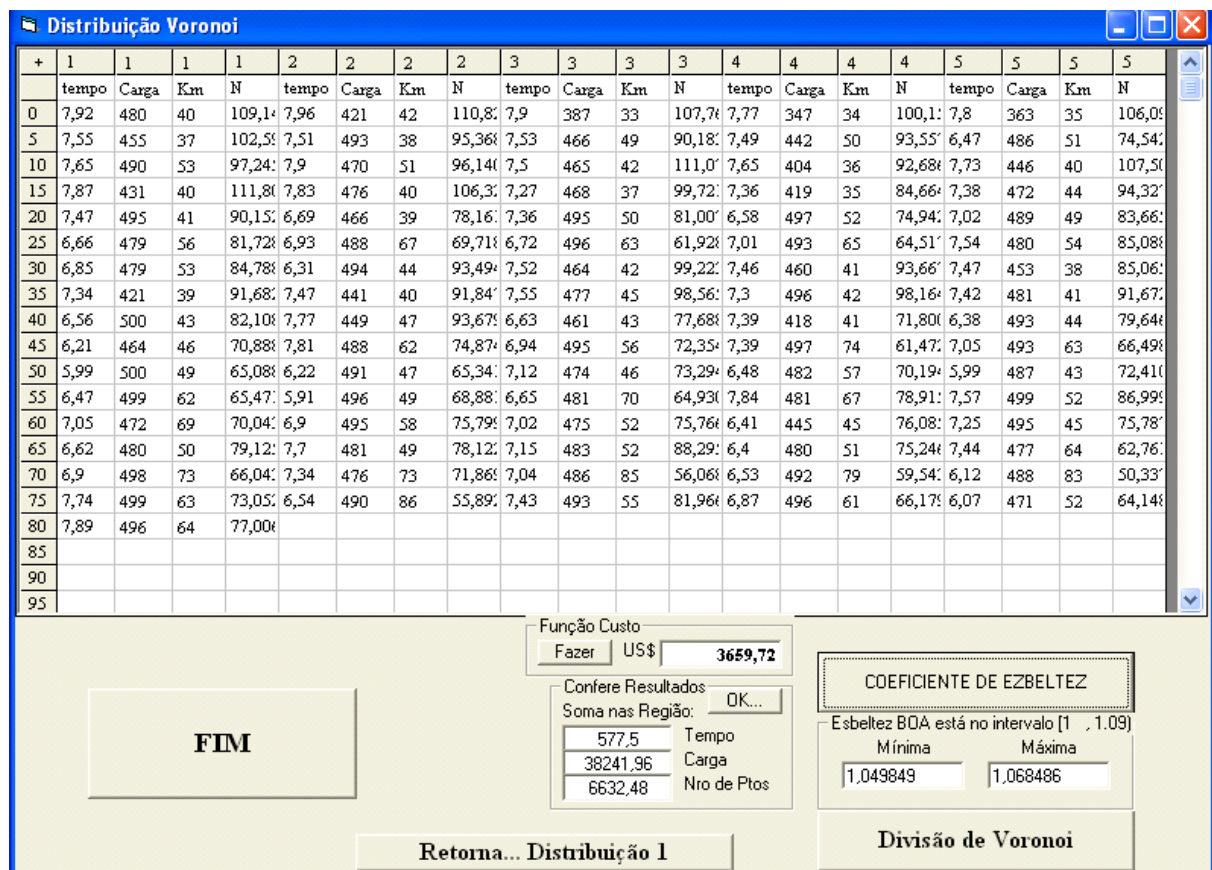
os valores equivalentes às zonas de 6 a 10. O mesmo se faz com a linha “10” com relação às zonas de 11 a 15. E assim sucessivamente até o último distrito.

Abaixo do quadro de valores, têm-se as seguintes representações:

- “138m” – Retícula quadrada de 138 metros da malha inicial onde é aproximada a função de aproximação utilizando splines;
- “35m” – Retícula quadrada de 35 metros da malha refinada pela função;
- “0h4min50.39862seg” – Tempo gasto para se fazer a distribuição polar;
- “219×249” – Dimensão da malha inicial;
- “861×980” – Dimensão da malha refinada;
- “Outros Valores” – (3672,47) Valor em dolar da operação; (579) Tempo total; (38241,97) Carga total; (6632,49) Total de clientes atendidos.

## 7.5.4 Valores Obtidos para a Divisão de Voronoi (35 Metros)

FIGURA 7.5.4 – RESULTADOS EM CADA DISTRITO: TEMPO, CARGA, DISTÂNCIA E ATENDIMENTO

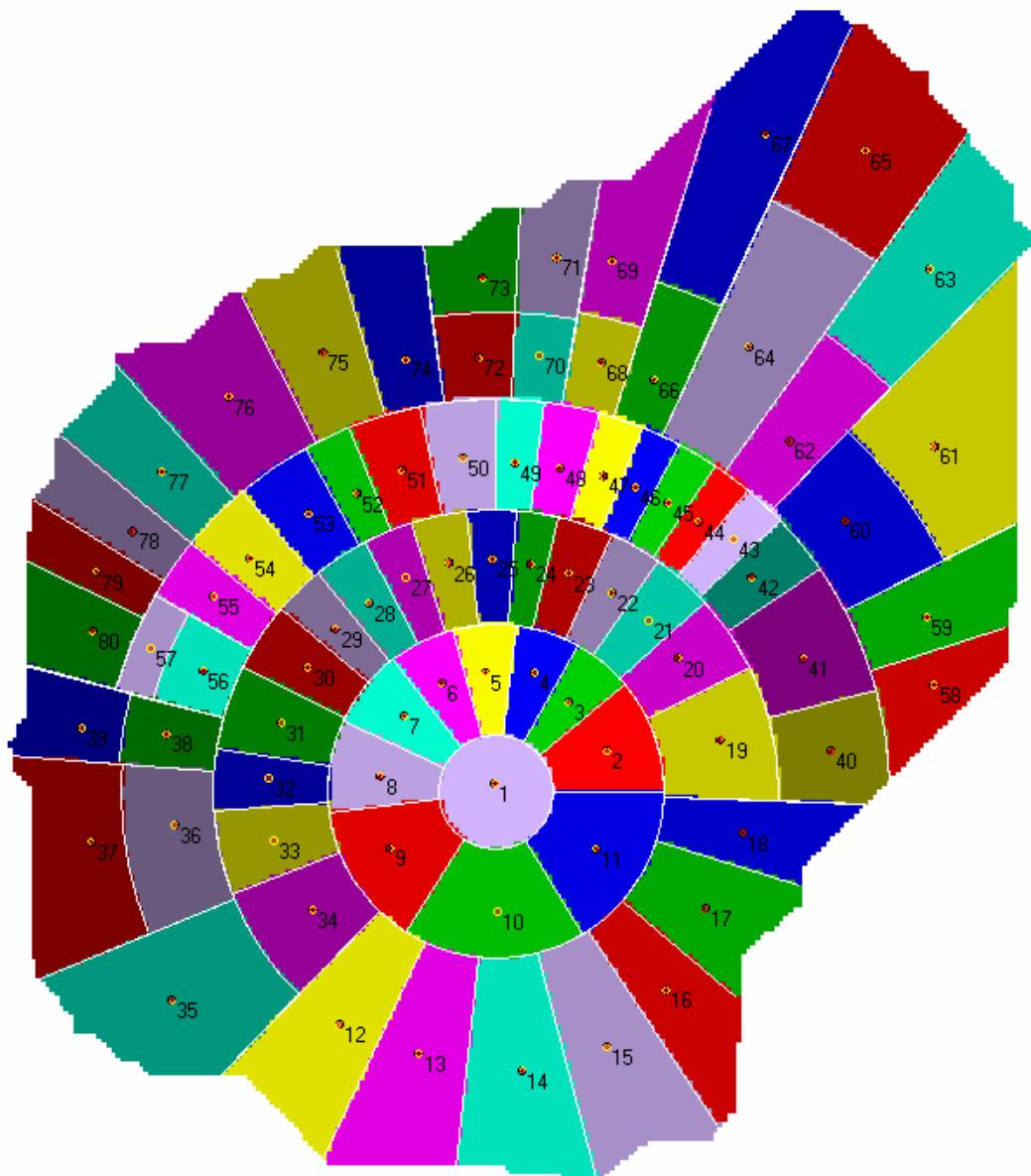


## 7.6 Aplicação do Algoritmo com Retículas de Dimensão de 138 Metros

Os valores da malha com retículas de dimensão de 138 metros foram obtidos a partir da spline por uma malha com retículas de dimensão de 553 metros.

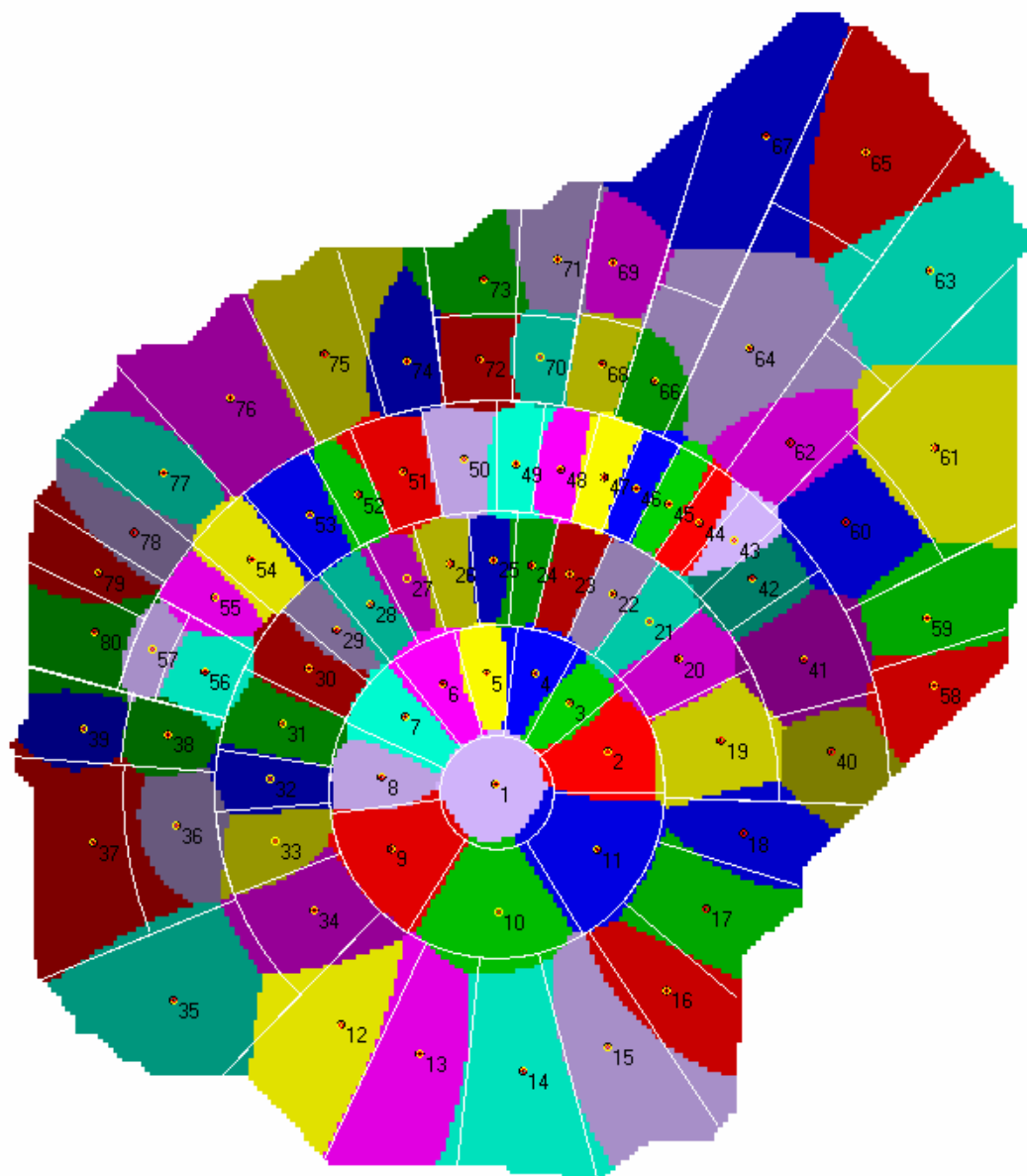
### 7.6.1 Resultado Gráfico da Divisão Polar (138 Metros)

FIGURA 7.6.1 – DIVISÃO POLAR COM A DETERMINAÇÃO DOS BARICENTROS



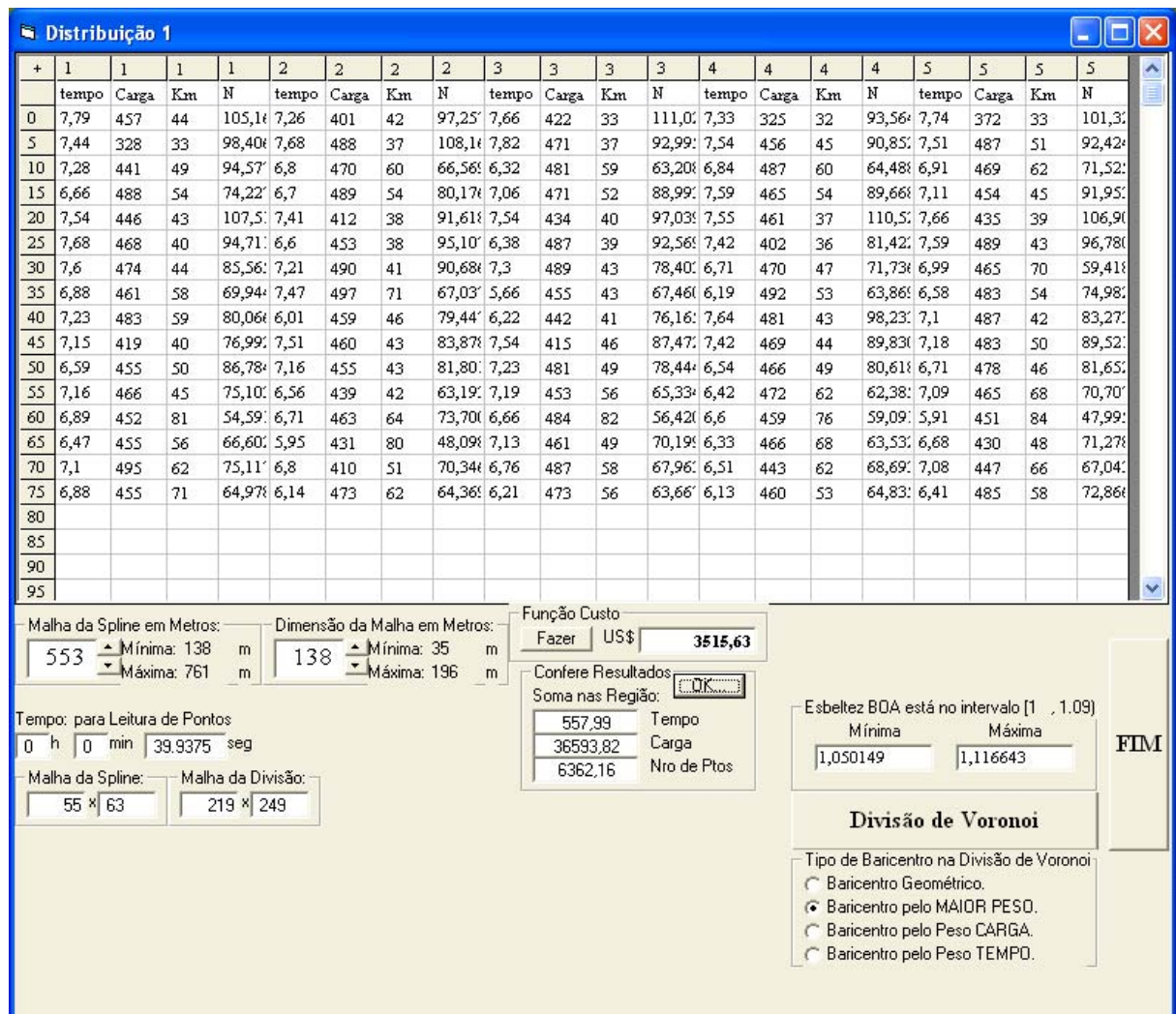
## 7.6.2 Resultado Gráfico da Divisão de Voronoi (138 Metros)

FIGURA 7.6.2 – DIVISÃO DE VORONOI COMPARADA À DIVISÃO POLAR



### 7.6.3 Valores Obtidos para a Divisão Polar (138 Metros)

FIGURA 7.6.3 – RESULTADOS EM CADA DISTRITO: TEMPO, CARGA, DISTÂNCIA E ATENDIMENTO



### Interpretação dos Valores da Figura 7.6.3

É semelhante a interpretação dos valores da figura 7.5.3.

## 7.6.4 Valores Obtidos para a Divisão de Voronoi (138 Metros)

FIGURA 7.6.4 – RESULTADOS EM CADA DISTRITO: TEMPO, CARGA, DISTÂNCIA E ATENDIMENTO

Distribuição Voronoi																			
+	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
	tempo	Carga	Km	N	tempo	Carga	Km	N	tempo	Carga	Km	N	tempo	Carga	Km	N	tempo	Carga	Km
0	7,74	461	41	106,20	6,97	382	41	93,06	7,97	433	33	114,10	7,42	337	34	96,59	7,9	367	31
5	7,85	356	36	103,3	7,52	492	38	107,9	7,23	436	32	84,07	7,85	487	47	95,88	7,29	484	50
10	7,81	477	53	100,7	6,58	455	57	63,54	6,28	493	59	65,24	6,65	450	60	60,38	7,05	480	62
15	6,3	459	52	71,61	6,56	479	53	79,13	6,84	470	53	86,15	7,99	480	54	93,51	7,92	497	47
20	7,91	460	43	110,4	7,01	389	37	85,60	7	418	38	93,18	7,11	416	38	102,7	7,2	407	36
25	6,98	419	38	86,67	7,14	493	37	102,3	6,69	489	38	93,26	6,94	386	34	77,58	7,32	489	43
30	7,29	462	41	82,30	7,09	456	41	84,71	7,09	481	41	77,31	6,61	453	50	68,77	6,59	456	68
35	6,72	476	50	71,89	7,24	461	71	65,87	5,43	459	43	66,47	5,85	457	49	58,08	5,86	437	52
40	6,92	466	59	81,16	6,26	474	48	82,49	6,83	481	43	83,05	7,79	494	43	96,14	6,57	457	41
45	7,08	402	41	74,63	7,89	479	44	88,90	7,36	430	44	91,34	7,3	441	46	84,90	6,68	444	47
50	7,56	497	52	97,68	7,08	470	42	82,26	7,06	462	48	76,11	6,92	484	50	85,64	5,91	438	42
55	7,09	455	44	74,11	6,4	428	42	62,26	7,7	496	57	70,40	6,78	486	64	63,43	7,18	480	63
60	6,97	468	80	59,62	6,51	438	61	72,36	6,85	473	85	54,71	7,15	494	80	64,67	5,77	463	81
65	6,82	498	50	73,93	6,61	490	88	55,73	7,08	476	50	71,21	6,4	477	60	65,80	7,36	480	50
70	6,29	433	60	65,69	7,38	491	54	82,45	6,81	475	59	64,61	6,9	478	56	74,87	7,26	465	70
75	7,07	483	73	67,88	6,06	460	59	62,46	6,02	473	53	65,66	5,71	435	53	59,13	6,23	444	56
80																			
85																			
90																			
95																			

FIM

Função Custo

Fazer US\$ 3502,7

Confere Resultados

Soma nas Região: OK...

556,39 Tempo

36593,82 Carga

6362,16 Nro de Ptos

COEFICIENTE DE EZBELTEZ

Esbeltez BOA está no intervalo [1 , 1.09]

Mínima 1,049895

Máxima 1,082597

Divisão de Voronoi

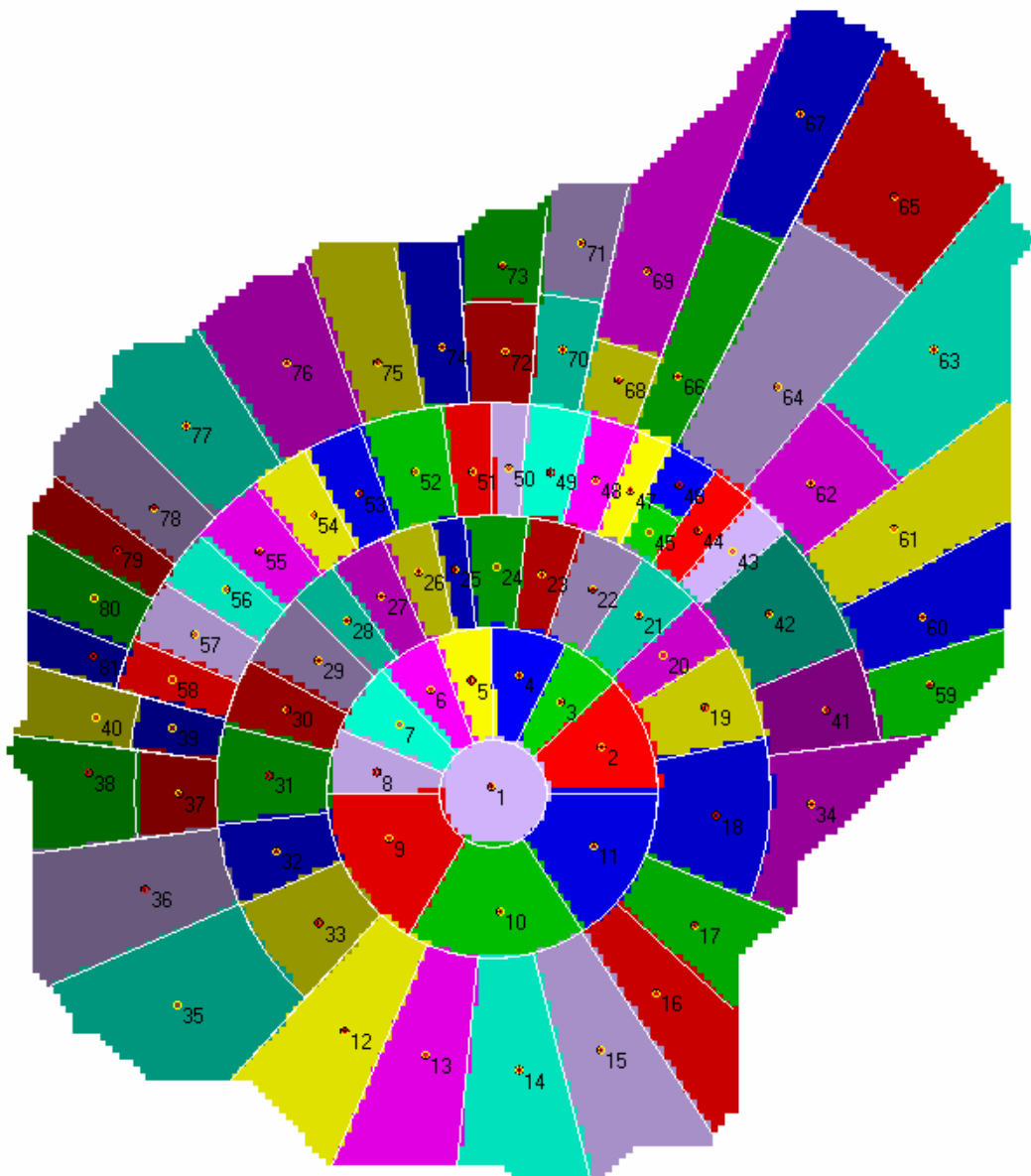
Retorna... Distribuição 1

## 7.7 Aplicação do Algoritmo com Retículas de Dimensão de 196 Metros

Os valores da malha com retículas de dimensão de 196 metros foram obtidos a partir da spline por uma malha com retículas de dimensão de 761 metros.

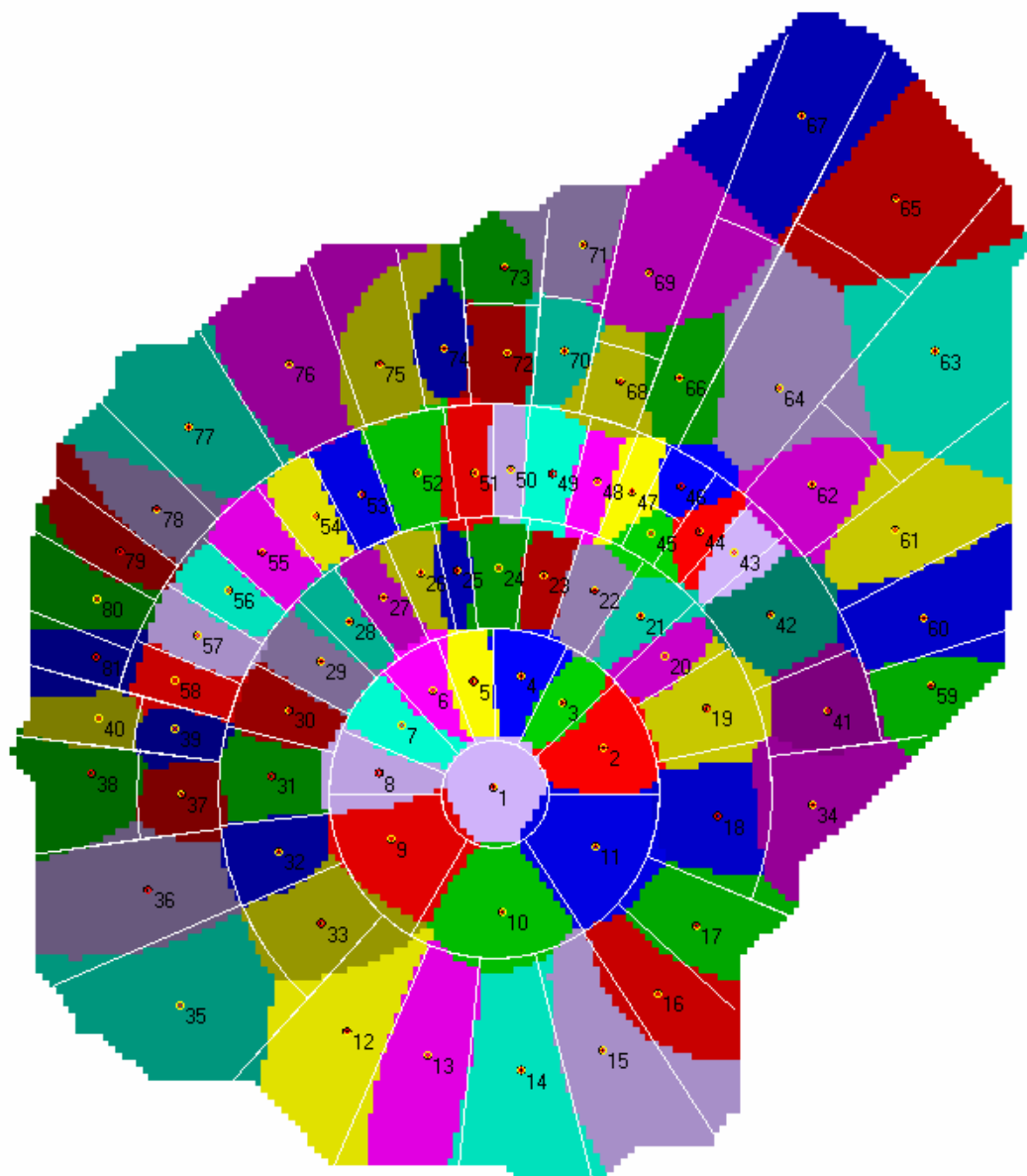
### 7.7.1 Resultado Gráfico da Divisão Polar (196 Metros)

FIGURA 7.7.1 – DIVISÃO POLAR COM A DETERMINAÇÃO DOS BARICENTROS



## 7.7.2 Resultado Gráfico da Divisão de Voronoi (196 Metros)

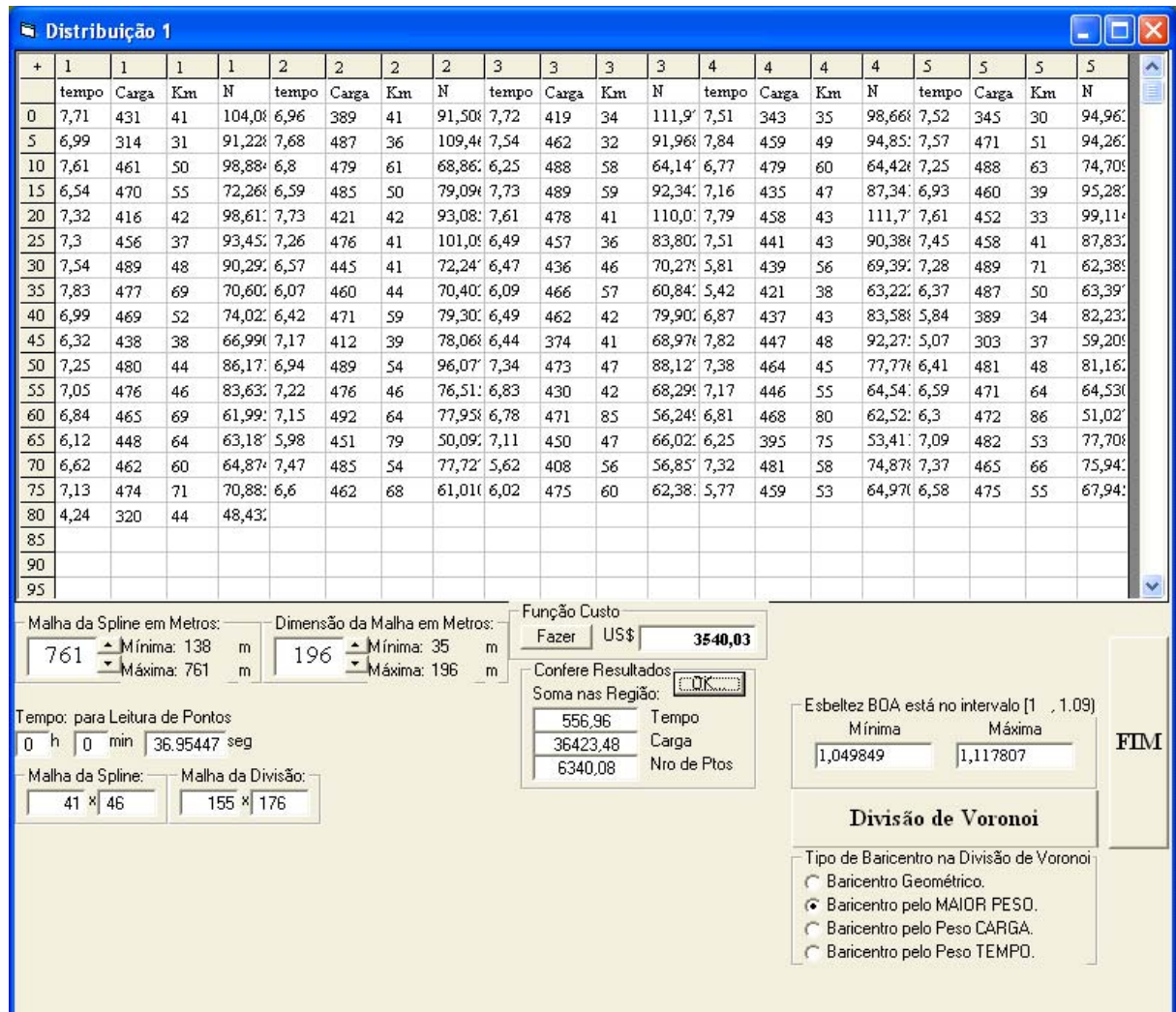
FIGURA 7.7.2 – DIVISÃO DE VORONOI COMPARADA À DIVISÃO POLAR





### 7.7.3 Valores Obtidos para a Divisão Polar (196 Metros)

FIGURA 7.7.3 – RESULTADOS EM CADA DISTRITO: TEMPO, CARGA, DISTÂNCIA E ATENDIMENTO



### Interpretação dos Valores da Figura 7.7.3

É semelhante à interpretação dos valores da figura 7.5.3.



## 7.7.4 Valores Obtidos para a Divisão de Voronoi (196 Metros)

FIGURA 7.7.4 – RESULTADOS EM CADA DISTRITO: TEMPO, CARGA, DISTÂNCIA E ATENDIMENTO

Distribuição Voronoi																			
+	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
	tempo	Carga	Km	N	tempo	Carga	Km	N	tempo	Carga	Km	N	tempo	Carga	Km	N	tempo	Carga	Km
0	7,91	463	40	107,6	7,41	412	43	98,02	7,82	417	33	110,9	7,44	325	35	96,07	7,78	368	32
5	6,61	308	31	87,10	7,54	470	35	106,2	7,87	471	37	93,83	7,8	465	48	93,97	7,14	456	48
10	7,99	477	54	101,2	6,59	456	59	65,40	5,55	434	53	57,12	6,61	464	59	62,54	6,74	437	62
15	6,14	459	51	70,76	6,82	492	52	79,86	7,06	465	51	88,50	7,58	454	53	90,89	7,53	491	39
20	7,42	444	41	103,1	7,32	403	40	90,88	7,93	485	39	114,8	7,81	470	43	114,3	7,24	425	33
25	6,81	435	35	88,78	6,21	423	36	86,93	7,13	445	37	82,87	6,47	408	39	82,91	7,24	446	40
30	6,67	460	43	83,66	6,79	452	41	72,30	7,12	495	52	79,92	6,19	448	57	74,49	6,9	476	69
35	7,57	452	66	66,93	5,6	429	42	64,68	5,94	448	54	58,91	5,96	470	40	70,86	5,68	430	45
40	7,33	496	54	78,56	6,15	451	54	74,72	5,6	406	41	71,67	7,08	452	41	92,07	7,24	461	39
45	6,7	466	43	69,63	7,27	440	42	82,04	7,78	438	41	85,48	7,2	429	47	88,78	7,09	439	41
50	6,39	436	46	79,84	6,18	434	49	83,34	7,17	468	46	84,27	7,17	475	44	80,99	6,51	442	48
55	5,87	422	42	69,58	7,34	480	45	78,36	7,01	442	42	71,64	6,86	445	53	63,23	6,89	476	66
60	6,57	467	67	62,00	7,42	487	62	78,02	6,87	494	86	57,28	6,87	484	77	65,78	6,47	477	88
65	6,68	485	57	71,46	6,79	499	88	54,68	7,1	427	50	64,17	6,72	494	77	63,92	6,58	431	52
70	6,74	451	62	63,38	7,35	430	52	75,98	6,16	469	55	63,43	5,66	402	48	59,86	7,11	437	62
75	7,26	477	75	71,11	7,05	493	72	67,21	5,4	448	53	59,09	6	467	54	63,83	6,45	463	55
80	5,42	413	50	60,57															
85																			
90																			
95																			

FIM

Função Custo

Fazer US\$ 3528,06

Confere Resultados

Soma nas Região: OK...

555,47 Tempo

36423,47 Carga

6340,08 Nro de Ptos

COEFICIENTE DE EZBELTEZ

Esbeltez BOA está no intervalo [1 , 1.09]

Mínima 1,050042

Máxima 1,080451

Divisão de Voronoi

Retorna... Distribuição 1

## 8 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 8.1 Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvido um método para o dimensionamento de sistemas de distribuição em que veículos fazem entregas de um depósito central para atender clientes que estão geograficamente dispersos por uma determinada região. O método é dividido em duas partes distintas, distribuição Polar e de Voronoi, nas quais se utilizam as aproximações de funções contínuas por splines. Com o dimensionamento, se obtém um conjunto de distritos para cada um dos quais está associado um veículo que percorre uma distância aproximada pelas funções contínuas que representam restrições espaciais e temporais para minimizar o custo total de operação da frota.

O espaço trabalhado para as distribuições, tanto Polar como de Voronoi, foi transformado de contínuo para discreto através das funções aproximadas por splines mas, mesmo assim, manteve-se a robustez do modelo.

Considerando a primeira parte do método, é dimensionado um sistema de distribuição através da forma polar, em que a região é dividida em zonas (distritos) limitadas entre dois raios e dois ângulos. Quando alguns desses distritos têm contato com a fronteira da região, esta fronteira age também como limite destes. Considerando somente esta primeira etapa de dimensionamento, já existe um avanço em relação a trabalhos científicos publicados. O modelo é abordado de forma contínua com funções aproximadas por splines de ordem 2 que dão valores importantes para a distribuição, como: carga e tempo totais dentro de cada zona.

Na segunda parte é obtido o dimensionamento através de diagrama multiplicativo de Voronoi com pesos. A abordagem de forma contínua e as funções usadas na primeira parte são também utilizadas aqui. Nesta etapa o objetivo é apropriar melhor os distritos obtidos da divisão Polar, modificando suas fronteiras, adequando melhor o sistema através de uma aproximação mais econômica das distâncias percorridas desde a saída do depósito até o retorno.

Este método pode ser usado para o planejamento de serviços de distribuição em regiões diversas, com a utilização de um depósito central. Pode determinar também, várias configurações para se determinar o tipo e a capacidade de veículo mais adequado ao material objeto de distribuição.

## 8.2 Recomendações

Os resultados obtidos por meio deste método são satisfatórios, porém, não contemplam algumas formas de dimensionamento de sistemas de distribuição, como por exemplo: distribuição com múltiplos depósitos; distribuição que utilize uma frota com veículos não homogêneos; distribuição sobre uma área que contenha alguma forma de barreira.

Para uma distribuição com um único depósito, a aproximação das distâncias percorridas por cada veículo no interior da zona tem o acréscimo do dobro da distância da zona ao depósito. Uma distribuição com mais de um depósito diminui este acréscimo, pois cada zona pode ser alocada ao depósito mais próximo.

Considerando a opção de uma frota com veículos não homogêneos, para as zonas mais distantes que podem ser limitadas pelo tempo, podem-se utilizar veículos de menor capacidade. O mesmo pode acontecer com zonas que tenham pouca densidade, já que, nesta situação, tem-se que percorrer distâncias maiores para fazer as entregas. Em zonas com densidade alta, o contrário deve acontecer, o mais indicado é a utilização de veículos com capacidade maior.

Levando em conta, agora, o dimensionamento de sistemas de distribuição em uma área que contenha alguma forma de barreira, como por exemplo: uma grande avenida que impeça o cruzamento em determinados pontos; um parque onde normalmente não existe passagem para veículos; um lago dentro da região ou mesmo um rio que cruza parte da região (fig. 8.1), estas barreiras devem ser tratadas através de distâncias que compensem seu contorno ou transposição. Cada região deve ser tratada de forma específica com relação às suas formas.

O dimensionamento de uma área dividida por um rio, por exemplo, está sujeito às transposições existentes, como pontes. Para verificar se um ponto pertence a

uma determinada zona, através da menor distância, é necessário somar a distância do ponto até a transposição do rio (ponte) com a distância desta transposição até o centro da zona. As fronteiras se modificam sensivelmente, como pode ser observado na figura 8.2.

FIGURA 8.1 – UM RIO QUE CRUZA A REGIÃO DE DISTRIBUIÇÃO (EXEMPLO DE BARREIRAS)

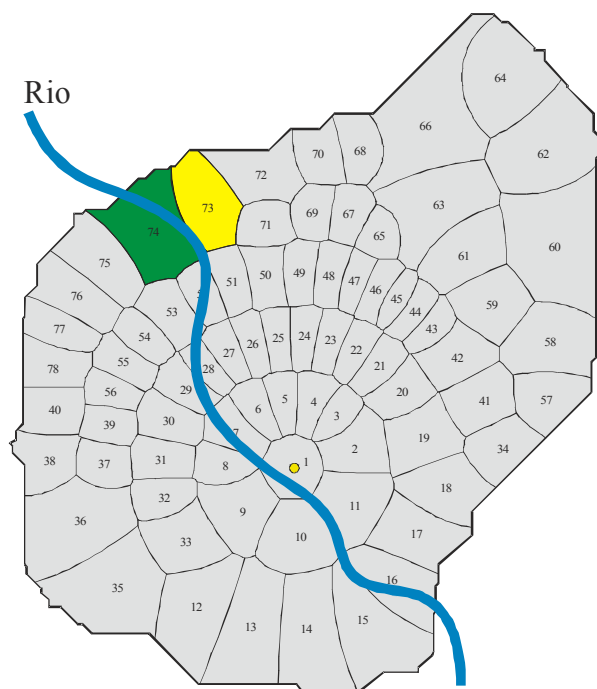
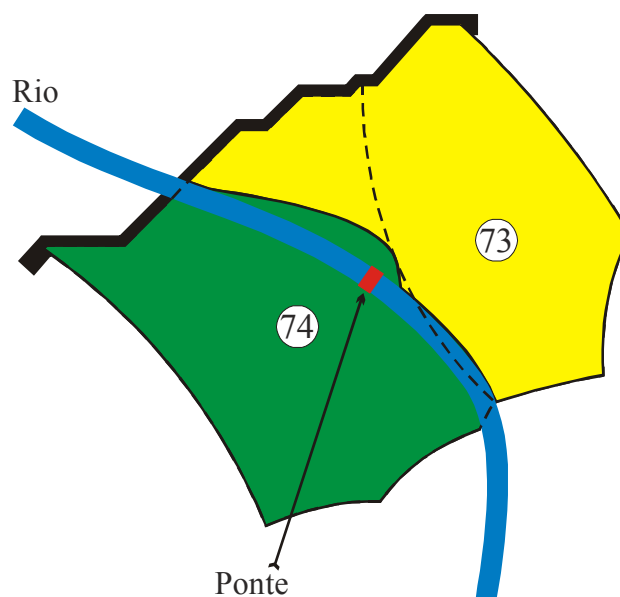


FIGURA 8.2 – UM EXEMPLO DE MODIFICAÇÃO DE FRONTEIRAS CONSIDERANDO UMA PONTE PARA TRANSPOR O RIO



Enfim, este trabalho mostra novas ferramentas para se trabalhar com

dimensionamento de sistemas de distribuição. Abre perspectivas para pesquisadores que queiram aplicar a técnica em outros trabalhos ou mesmo continuar este, tratando o problema de barreiras ou realizando outras melhorias que se façam necessárias.

### **8.3 Contribuição para a Ciência**

A presente tese oferece uma alternativa de solução, em tempo computacional aceitável, para uma classe de problemas de difícil resolução. O método apresentado permite resolver problemas de grande porte de forma mais rápida e confiável que os métodos existentes, que são ou contínuos ou discretos. O método aqui faz uma associação de equações de aproximações contínuas, que atuam sobre uma discretização construída por meio de malhas que cobrem a área de distribuição.

## REFERÊNCIAS

- 1 ASH, P.F.; BOLKER, E.D. (1986). Generalized Dirichlet tessellations *Geometriae Dedicata*, 20, 209-243. [3.1.1, 3.1.4, 3.1.5].
- 2 AURENHAMMER, F. (1988). Voronoi diagrams - a survey Institute for Information Processing, *Technical University of Graz*, Report 263. [1.0, 3.1.1, 3.1.4, 3.2.1, 3.4.3, 3.7.3].
- 3 AURENHAMMER, F.; EDELSBRUNNER, H. (1984). An optimal algorithm for constructing the weighted Voronoi diagram in the plane *Pattern Recognition*, 17, 251-257.
- 4 BALLOU, R.H. (1993). Logística empresarial: transportes, administração de materiais e distribuição física, Atlas, São Paulo, 389 p.
- 5 BARTHOLDE, J.J.; PLATZMAN, L.K. (1988). Heuristics Based on Spacefilling Curves for Combinatorial Problems in Euclidean Space, *Manage. Sci.*, Vol. 34.
- 6 BEARDWOOD, J.; HALTON, J.H.; HAMMERSLEY, J.M. (1959). The shortest path through many points, *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, Vol. 55, p 299-327.
- 7 BODIN, L.; GOLDEN, B.; ASSAD, A.; BALL, M. (1983). Routing and schedulin of vehicles and crews: the state of the art, *Computers and Operations Research*, Vol. 10, nº 2.
- 8 BOOR, C. (1987). A Practical Guide to Splines. University of Wisconsin - Madison, *Mathematics Research Center*, Madison, Wisconsin, U.S.A.
- 9 BOOTS, B.; SOUTH, R. (1997). Modeling Retail Trade Areas Using Higher-Order, Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams. *Journal of Retailing*, New York University, Vol. 73(4), p 519-536.
- 10 BRUCKER, P. (1998). Scheduling Algorith ms, Second Edition, *University of Osnabrueck*, Germany.
- 11 BURNS, L.D.; HALL, R.W.; BLUMENFELD, D.E.; DAGANZO, D.F. (1985). Distribution Strategies that Minimize Transportation ans Inventory costs, *Operations Research*, Vol. 33, nº 3, p 469-490.
- 12 CHIEN, T.W. (1992). Operational Estimators for the Length of a Traveling Salesman Tour, *Computers Ops. Tes.*, Vol. 19, nº 6, p 469-478.
- 13 CHRISTOFIDES, N.; MINGOZZI, A.; TOTH, P. (1979). *The vehicle routing problem*, in: Combinatorial Optimization, Christofides, N. ; Mingizzi, A ; Toth P. and Sandi C. (eds.). John Wiley.
- 14 CHRISTOPHER, M. (1999). Logística e Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos, Estratégias para a Redução de Custos e Melhoria dos Serviços. São Paulo: Pioneira.
- 15 CNT (2002). Confederação Nacional do Transporte - Pesquisa Empresa de Cargas. Relatório Analítico.
- 16 DAGANZO, C.F. (1984a). The Length of Tours in Zones of Different Shapes, *Transp. Research B*, Vol. 18B, nº 2, p 135-145.

- 17 DAGANZO, C.F. (1984b). The Distance Traveled to Visit N Points with a Maximum of C Stops per Vehicle: Na Analytic Model and na Application, *Transp. Science*, Vol. 18, p 331-350.
- 18 DAGANZO, C.F. (1988). A comparison of In-Vehicle and Out-Of-Vehicle Freight Consolidation Strategies, *Transp. Research B*, Vol. 22B, p 173-180.
- 19 DASCI, A.; VERTER, V. (2001). A continuous model for production - distribution system design. *European Journal of Operational Research* 129, p. 287-298.
- 20 DREZNER, Z.V.I. (1995). Facility Location, Using Voronoi Diagrams, Springer - Verlag, New York, p 103-118.
- 21 EILON, S.; WATSON-GANDY, CHRISTOFIDES. (1971). Distribution Management: Mathematical Modellin and Practical Analysis, *Griffin*, London.
- 22 ESPEJO, L.G.A. (2001). Problemas de Localização Hierárquicos. *Tese de doutorado*, COPPE/UFRJ.
- 23 GALVÃO, R.D.; ESPEJO, L.G.A.; BOFFEY, B. (2000). A hierarchical model for the location of perinatal facilities in the municipality of Rio de Janeiro. Aceito para publicação no *European Journal of Operational Research*.
- 24 GEN, E. (1983). Algorithms for high dimensional Voronoi diagrams, Graduation thesis, *Department of Mathematical Engineering and Information Physics*, University of Tokyo [in Japanese]. [2.1, 2.2].
- 25 GENDREAU, M.; LAPORTE, G.; VIGO, D. (1999). Heuristics for the traveling salesman problem with pickup and delivery. *Computers and Operations Research*, **26**, 699-714.
- 26 GENTREAU, M.; LAPORTE, G.; POTVIN, J.Y. (1997). *Vehicle Routing: Modern Heuristics*, in: Local Search in Combinatorial Optimization, E. Aarts and J. K. Lenstra (eds.) - p. 311-336. John Wiley.
- 27 GONÇALVES, M. B. (1999). Modelagem Matemática em Logística Urbana. Universidade Federal de Santa Catarina. Disciplina em *Transporte e Logística* - 99/3.
- 28 GRACIOLLI, O.D. (1998). Dimensionamento e Otimização de Sistemas de Distribuição Física de Produtos - Um Enfoque Contínuo. *Tese de Doutorado*, *Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas*, UFSC.
- 29 HALL, R. (1985). Determining Vehicle Dispatch Frequency when Shipping Frequency Differs Among Suppliers, *Transp. Research B*, Vol. 19B, p 421-431.
- 30 HAN, F.; DAGANZO, C.F. (1986). Distributing Nonstarable Items without Transhipments, TRT, TRB (Nr 1061).
- 31 HIGGINSON, J.K. (1993). Modeling Shipper Costs in Physical Distribution Analysis, *Transp. Research A*, Vol. 27A, p 113-124.
- 32 JAILLET, P.; ODoni, A. (1988). The probabilistic vehicle routing problem, in: B.L. Golden and A.A. Assad (eds.) *Vehicle Routing: Methods and Studies*, *North-Holland*, Amsterdam.
- 33 KNUTH, D.E. (1973). The Art of Computer Programmeng. Volume III: Sorting and Searching Reading, Mass.: Addison-Wesley. [2.3, 4.4].
- 34 KOBAYASHI, S. (2000). Renovação da Logística, Como Definir Estratégias de Distribuição Física Global. São Paulo: Atlas S.A.

- 35 KWON, O.; GOLDEN, B.; WASIL, E. (1995). Estimating the Length of the Optimal TSP Tour: Na Empirical Stugy Using Regression and Neural Networks, *Computers Ops. Res.* Vol. 22, nº 10, p 1039-1046.
- 36 LANGEVIN, A.; SOUMIS, F. (1989). Design of Multiple-Vehicle Delivery Tours Satisfying Time Constraints, *Transp Research B*, Vol. 23B, p 123-138.
- 37 LARSON, R.C.; ODONI, A.R. (1981). Urban Operations Research, *Preentice-Hall*. Englewood Cliffs.
- 38 NEWELL, G.S.; DAGANZO, C.F. (1986). Design of Multiple-Vehicle Delvery Tours - II Other Metrics, *Transp. Research B*, Vol. 20B, p 365-376.
- 39 NOVAES, A.G. (1989). Sistemas Logísticos: Transporte, Armazenamento e Distribuição Física de Produtos, *Ed. Edgard Blucher*, São Paulo.
- 40 NOVAES, A.G. (1991). Dimensionamento de Sistemas de Distribuição Física de Produtos com Restrições de Tempo e de Capacidade, trabalho apresentado ao concurso de professor titular, *Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas*, UFSC.
- 41 NOVAES, A.G. (1992). Routing Strategies for high-Density urban Distribution Services, paper presented to EURO XII - *TIMS XXXI joint International Conference*, Helsinki, Finland (June-July).
- 42 NOVAES, A.G. (2000). Logistics Districting With Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams, *XI Congreso Panamericano de Ingeniería de Tránsito y Transporte*, Gramado, RS. 19 al 24 de Noviembre del 2000.
- 43 NOVAES, A.G.; CURSI, J.E.S.; GRACIOLLI, O.D. (2000). A continuous approach to the design of physical distribution systems. *Computers & Operations Research*.
- 44 NOVAES, A.G.; GRACIOLLI, O.D. (1999). Designing Multi-Vehicle Delivery Tours in a Grid-Cell Format, *European Journal of Operational Research* 119, p 613-634.
- 45 NUNES, L.F. (2002). Problemas de Localização de Instalações com Hierarquias. *Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas*, UFSC.
- 46 OKABE, A.; BOOTS, B.; SUGIHARA, K. (1992). Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi Diagrams. *John Wiley & Sons*, Chichester. New York – Brisbane – Toronto – Singapore.
- 47 OKABE, A.; BOOTS, B.; SUGIHARA, K. (1994). Nearest neighbourhood operations with generalized Voronoi diagrams: a review. *Int. J. Geographical Information Systems*, Vol. 8, No. 1, p 43-71.
- 48 PERSIANO, R. M. (1996). Bases da Modelagem Geométrica. *Instituto de Computação, UNICAMP*, Campinas.
- 49 POGU, M.; SOUZA DE CURSI, J.E. (1994). Global Optimization by Random Perturbation of the Gradient Method with a Fixed Parameter, *Journal of Global Optimization*, Vol. 5, p 159-180.
- 50 ROBUSTÉ, F.; DAGANZO, C.F.; SOULEYRETTE, R.R. (1990). Implementing Vehicle Models, *Transp. Res.-B*, Vol. 24B, nº 4, p 263-286.
- 51 SOUZA, J.C.; NOVAES, A.G.; GALVÃO, L.C. (2000). Partição espacial com diagramas de Voronoi associada a problemas logísticos. XIV Congresso de pesquisa e ensino em transporte - ANPET, Gramado - RS.



- 52 STEIN, D.M. (1978). Na Asynptotic, Probabilistic Analysis of a Routing Problem, *Math of Operations Research*, Vol. 3, nº 2, p 89-101.

## 9 ANEXO 1 - DIAGRAMAS DE VORONOI

Dados de OKABE et al. (1992).

### 9.1 Definições Básicas dos Diagramas de Voronoi

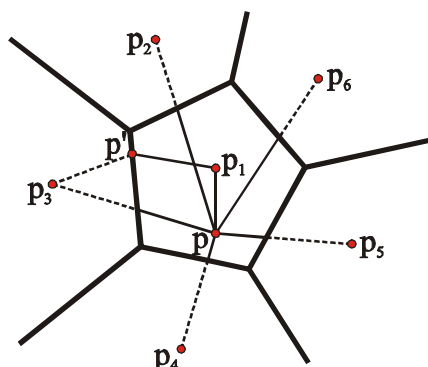
#### 9.1.1 Definições Para o Diagrama Comum de Voronoi

Para facilidade de exposição, será dada uma definição muito intuitiva de um diagrama de Voronoi em um plano. Será retomada esta definição com mais precisão em termos matemáticos. Finalmente, estendendo a definição de  $R^2$  (bi-dimensional) para  $R^m$ , será definido um diagrama de Voronoi  $m$ -dimensional.

Suponha que um conjunto de pontos esteja no plano Euclidiano (por exemplo, os grupos de pontos na figura 9.1.1). É assumido que o número de pontos é de dois ou mais, mas finito, sendo todos distintos. Dado um ponto fixo qualquer, será assumido que toda localização no plano está associada ao membro mais próximo no conjunto de pontos (na figura 9.1.1, por exemplo, o ponto  $p$  é associado ao grupo limitado pela figura geométrica que forma um pentágono). Se uma localização acontece de tal forma a estar igualmente perto de dois ou mais membros do conjunto de pontos, a locação será designada a todos esses membros (o ponto  $p'$  na figura 9.1.1 é designado a dois grupos com base nos membros  $p_1$  e  $p_3$ ). Como resultado, os conjuntos de localizações designados a cada membro no conjunto de pontos formam suas próprias regiões. As regiões resultantes são coletivamente exaustivas no plano porque cada locação é designada a pelo menos um conjunto de pontos. O conjunto de locações designado a dois ou mais membros do conjunto de pontos formam as regiões de fronteiras (as linhas contínuas na figura 9.1.1). São sobrepostas conseqüentemente somente regiões adjacentes nos limites de suas fronteiras. Assim o conjunto das regiões é coletivamente exaustivo e mutuamente exclusivo com exceção das fronteiras, ou seja, o conjunto das regiões forma uma tecelagem. O nome desta tecelagem é *diagrama comum de Voronoi no plano*, e as regiões que constituem o diagrama de

Voronoi são *polígonos comuns de Voronoi*.

FIGURA 9.1.1 – DIAGRAMA COMUM DE VORONOI



### Definição V1 – Diagrama Comum de Voronoi no Plano

Dado um conjunto de dois ou mais pontos distintos no plano Euclidiano, porém em número finito, são associadas todas as localizações naquele espaço com o(s) membro(s) mais próximo do ponto fixado com respeito à distância Euclidiana. O resultado é uma tecelagem no plano em um conjunto de regiões associado com membros do conjunto de pontos. Esta tecelagem será chamada de *diagrama comum de Voronoi no plano* gerado pelo conjunto de pontos, e as regiões que constituem o diagrama de Voronoi são *polígonos comuns de Voronoi*.

Quando se trabalha no plano Euclidiano (espaço), deve-se referir ao diagrama comum de Voronoi no plano simplesmente como um *diagrama de Voronoi* e um polígono comum de Voronoi como um *polígono de Voronoi*. Também não será referido aqui o conjunto de pontos compreendido de um único membro, porque tal diagrama de Voronoi é por demais trivial (este consiste de somente um polígono de Voronoi que é todo o plano).

Será dado o restante da Definição V1 em termos matemáticos. Considerado um número finito  $n$ , de pontos no plano Euclidiano, e assumindo-se que  $2 \leq n < \infty$ , os  $n$  pontos são classificados por  $p_1, p_2, \dots, p_n$  com as coordenadas cartesianas  $(x_{11}, x_{12}), (x_{21}, x_{22}), \dots, (x_{n1}, x_{n2})$  ou vetores de posição  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Os  $n$  pontos são *distintos* de tal forma que  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j, i, j \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Tome  $p$  como sendo um ponto arbitrário no plano Euclidiano com coordenadas  $(x_1, x_2)$  ou vetor de posição  $x$ . Então a distância

Euclidiana de  $p$  para  $p_i$  é dada por  $d(p, p_i) = \|x - x_i\| = \sqrt{(x_1 - x_{i1})^2 + (x_2 - x_{i2})^2}$ . Se  $p_i$  é o próximo ponto de  $p$  ou  $p_i$  é um dos próximos pontos de  $p$ , tem-se a relação  $\|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|$  para  $j \neq i, j \in I_n$  (veja as linhas da figura 9.1.1). Neste caso,  $p$  é designado para  $p_i$ . Portanto, a Definição V1 é escrita matematicamente da forma que se segue.

### Definição V2 – Um Diagrama Comum de Voronoi no Plano

Seja  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , onde  $2 \leq n < \infty$  e  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j, i, j \in I_n$ . Chama-se a região dada por

$$V(p_i) = \{x / \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\| \text{ para } j \neq i, j \in I_n\} \quad (9.1.1)$$

o polígono (comum) de Voronoi associado com  $p_i$  (ou o polígono de Voronoi de  $p_i$ ), e o conjunto dado por

$$V = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\} \quad (9.1.2)$$

é o diagrama (comum no plano) de Voronoi gerado por  $P$  (ou diagrama de Voronoi de  $P$ ).

Será chamado o  $p_i$  de  $V(p_i)$  o ponto gerador ou gerador do  $i$ -ésimo polígono de Voronoi, e o conjunto  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  o conjunto gerador do diagrama de Voronoi  $V$ . Para abreviar pode-se escrever  $V_i$  para  $V(p_i)$ . Também se pode usar  $V(x_{i1}, x_{i2})$  ou  $V(x_i)$  quando se necessita enfatizar as coordenadas ou a locação do vetor para o gerador  $p_i$ . Adicionalmente, pode-se usar  $V(P)$  quando se necessita explicitamente indicar o conjunto gerador  $P$  de  $V$ .

Na Definição V2 deve-se observar que a relação na equação (9.1.1) é definida nos termos de  $\leq$ , mas não  $<$ . Um polígono de Voronoi é conseqüentemente um conjunto fechado. Alternativamente, pode-se definir um polígono de Voronoi como

$$V^0(p_i) = \{x / \|x - x_i\| < \|x - x_j\| \text{ para } j \neq i, j \in I_n\} \quad (9.1.3)$$

que é um conjunto aberto. Ambas as definições são aceitáveis, mas neste texto, define-

se um polígono de Voronoi como um conjunto fechado. Quando se necessita enfatizar tal propriedade, chama-se  $V(p_i)$  um *polígono de Voronoi fechado*, e  $V^0(p_i)$  um *polígono de Voronoi aberto*.

Já que um polígono de Voronoi é um conjunto fechado, ele contém as fronteiras denotadas por  $\partial V(p_i)$ . A fronteira de um polígono de Voronoi consiste de segmentos de retas, semi-retas ou retas, que são chamadas *bordas de Voronoi*. Denota-se a fronteira de Voronoi por  $e_i$ . Observando aquele = incluído dentro da relação de equação (9.1.1), pode-se alternativamente definir uma fronteira de Voronoi como um segmento de reta, uma semi-reta ou uma reta partilhada por dois polígonos de Voronoi sendo esta extremidade a final. Matematicamente, se  $V(p_i) \cap V(p_j) \neq \emptyset$ , o conjunto  $V(p_i) \cap V(p_j)$  resulta na fronteira de Voronoi (que pode ser degenerado em um ponto). Correspondendo à notação  $e_i$ , usa-se  $e(p_i, p_j)$  para  $V(p_i) \cap V(p_j)$ , que é realmente como a fronteira de Voronoi generalizada por  $p_i$  e  $p_j$ . Note que  $e(p_i, p_j)$  pode ser vazia. Se  $e(p_i, p_j)$  não é tampouco vazio em um ponto, diz-se que os polígono de Voronoi  $V(p_i)$  e  $V(p_j)$  são *adjacentes*.

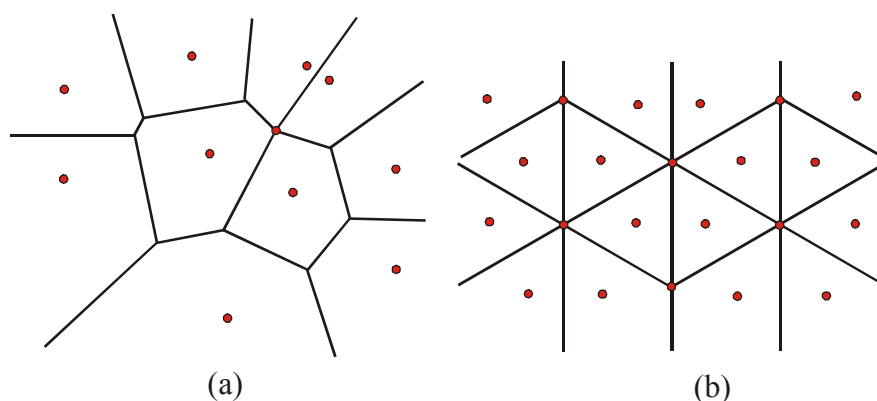
Uma extremidade final de uma fronteira de Voronoi é chamada de *vértice de Voronoi*. Alternativamente, um vértice de Voronoi pode ser definido como um ponto partilhado por três ou mais polígonos de Voronoi. Denota-se um vértice de Voronoi por  $q_i$ . Quando existir pelo menos um vértice de Voronoi em que quatro ou mais fronteiras de Voronoi encontram-se num diagrama de Voronoi  $V$  (o grupo não cheio na figura 9.1.2a), diz-se que  $V$  é degenerado, por outro lado, diz-se que  $V$  é não degenerado. O diagrama de Voronoi na figura 9.1.2a é degenerado e aquele na figura 9.1.1 é não degenerado. Um diagrama degenerado de Voronoi freqüentemente aparece quando os geradores de pontos são lugares regulares, tal como na figura 9.1.2b. Em algumas derivações, um diagrama degenerado de Voronoi requer longos tratamentos especiais que nem sempre são comuns. Para contornar esta dificuldade, é freqüente fazer a seguinte hipótese.

### **Hipótese V1 (a hipótese não degenerada)**

Todo vértice de Voronoi em um diagrama de Voronoi tem exatamente três

fronteiras de Voronoi.

FIGURA 9.1.2 – DIAGRAMAS DEGENERADOS DE VORONOI



Na definição V1 ou V2, define-se um diagrama de Voronoi em um plano ilimitado. Na prática, porém, freqüentemente está de acordo com a limitação da região  $S$ , onde os geradores são locados (as linhas externas da figura 9.1.3). Neste caso é considerado o conjunto dado por

$$V \cap S = \{V(p_1) \cap S, V(p_2) \cap S, \dots, V(p_n) \cap S\} \quad (9.1.4)$$

FIGURA 9.1.3 – DIAGRAMAS LIMITADOS DE VORONOI

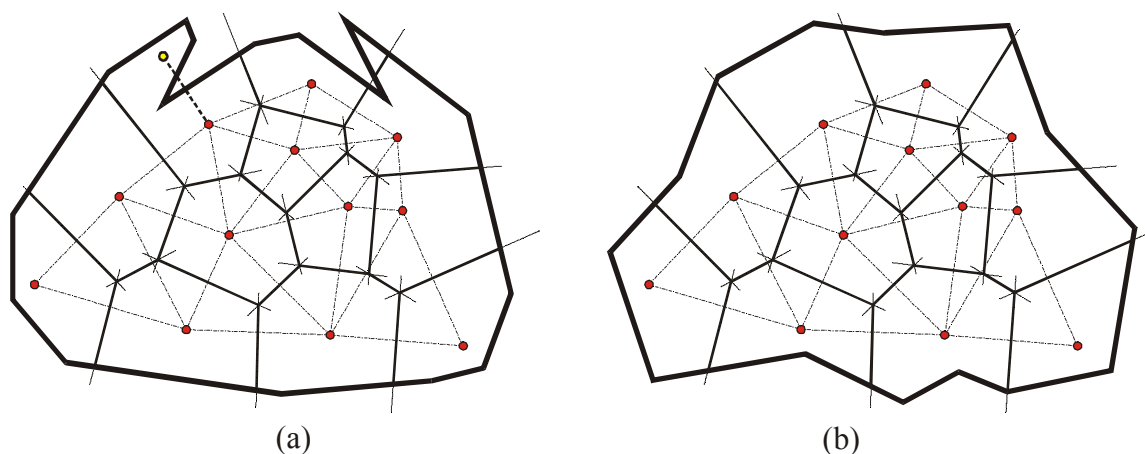


Figura 9.1.3a: É uma região limitada de Voronoi desligada, um polígono limitado de Voronoi onde existem pontos em que segmentos formados com o gerador não estão inteiramente contidos no polígono (Ex: o segmento de linha pontilhado).

Figura 9.1.3b: Polígono limitado de Voronoi com ligações contidas nos polígonos em relação aos geradores.

A união dos conjuntos de *diagramas limitados de Voronoi* ou *diagrama de*

*Voronoi limitado* dá-se o nome de  $S$ . Se o polígono de Voronoi  $V(p_i)$  compartilha da fronteira de  $S$ , então é chamada a região  $V(p_i) \cap S$  por *polígono de fronteira de Voronoi* ou *região* (o termo “região” é usado quando  $\partial S$  é curvo ou quando  $V(p_i) \cap S$  é não conectado).

Deve-se notar que uma região de fronteira de Voronoi pode ser desligada (região com segmento de reta pontilhado na figura 9.1.3a), e esse segmento de reta unindo um ponto em  $V(p_i)$  e  $p_i$  pode não estar contido em  $V(p_i) \cap S$  (o segmento de reta pontilhado na figura 9.1.3a). Na prática, como a fronteira dos polígonos de Voronoi são freqüentemente problemáticas, tem-se assim que definir um diagrama de Voronoi mais apropriado. Um diagrama limitado de Voronoi pode ser significativo na prática se toda região de fronteira de Voronoi for com ligações inteiramente contidas em cada polígono com respeito ao ponto gerador (fig. 9.1.3b). Na prática, usualmente se trabalha com uma fronteira bem formada do diagrama de Voronoi.

Como observado na figura 9.1.1, o diagrama normal de Voronoi consiste de polígonos. Recorde que um polígono é definido em relação a semiplanos, pode-se alternativamente definir um diagrama de Voronoi em relação a semiplanos. Para mostrar esta definição alternativa, considera-se a linha perpendicular mediatriz ao segmento  $\overline{p_i p_j}$  junção de dois geradores  $p_i$  e  $p_j$  (fig. 9.1.4). Chama-se esta linha de mediatriz entre  $p_i$  e  $p_j$  denotada por  $b(p_i, p_j)$ . Desde que um ponto sobre a mediatriz  $b(p_i, p_j)$  é igualmente distante dos pontos geradores  $p_i$  e  $p_j$ , e  $b(p_i, p_j)$  é escrito como

$$b(p_i, p_j) = \{x / \|x - p_i\| = \|x - p_j\| \}, j \neq i. \quad (9.1.5)$$

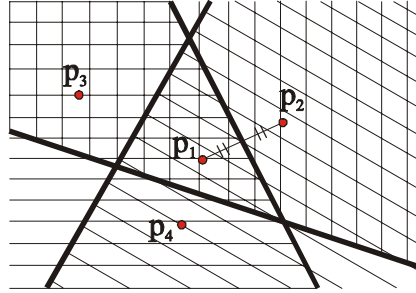
A mediatriz divide o plano em dois semiplanos e é dado por

$$H(p_i, p_j) = \{x / \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\| \}, j \neq i. \quad (9.1.6)$$

Chama-se a região  $H(p_i, p_j)$  de *região de domínio de  $p_i$  sobre  $p_j$* . Na figura 9.1.4 é indicada a região dominada de  $p_1$  sobre  $p_2$ ,  $p_3$  e  $p_4$  pelas linhas horizontais, diagonais e verticais criando as regiões, respectivamente. Obviamente, na região de domínio  $H(p_i, p_j)$  a distância para o gerador  $p_i$  é menor ou igual ao do gerador  $p_j$ . Na figura 9.1.4, portanto, a distância de um ponto  $p$  até a interseção das linhas verticais,

horizontais e diagonais criando as regiões do gerador  $p_1$  é menor ou igual à distância de  $p$  para o gerador  $p_j, j=2,3,4$ . Esta relação é equivalente à equação (9.1.1), e, com isto, a interseção  $H(p_1, p_2) \cap H(p_1, p_3) \cap H(p_1, p_4)$  dá o polígono de Voronoi associado a  $p_1$ . Para este exemplo, entende-se que a seguinte definição é uma alternativa da Definição V2.

FIGURA 9.1.4 – POLÍGONOS DE VORONOI OBTIDOS DE SEMIPLANOS



### Definição V3 – Um Diagrama Comum de Voronoi no Plano definido com Semiplanos

Tome  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ , onde  $2 \leq n < \infty$  e  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j, i, j \in I_n$ . É chamada a região dada por

$$V(p_i) = \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(p_i, p_j) \quad (9.1.7)$$

de polígono (normal) de Voronoi associado com  $p_i$  e o conjunto  $V(P) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}$  o diagrama (normal no plano) de Voronoi gerado por  $P$ .

A equivalência da definição V3 para a definição V2 é aparente, porque  $\|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|$  se e somente se  $x \in H(p_i, p_j)$  para  $j \neq i$ .

Pode-se prontamente estender a definição acima para o espaço  $m$ -dimensional Euclidiano.

### Definição V4 – Um Diagrama Comum de Voronoi em $\mathbb{R}^m$

Tome  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^m$ , onde  $2 \leq n < \infty$  e  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j, i, j \in I_n$ . É chamada a região dada por



$$V(p)=\{x / \|x-x_i\| \leq \|x-x_j\| \text{ para } j \neq i, i, j \in I_n\} \quad (9.1.8)$$

$$= \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(p_i, p_j) \quad (9.1.9)$$

de poliedro comum (normal) de Voronoi  $m$ -dimensional associado com  $p_i$  e o conjunto  $V(P)=\{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}$  o diagrama normal de Voronoi  $m$ -dimensional gerado por  $P$ , onde  $H(p_i, p_j)$  é dado pela equação (9.1.6) para  $R^m$ .

Note que quando  $R^m$  é entendido, pode-se simplesmente chamar  $V(P)$  de *diagrama comum de Voronoi* ou apenas um *diagrama de Voronoi*.

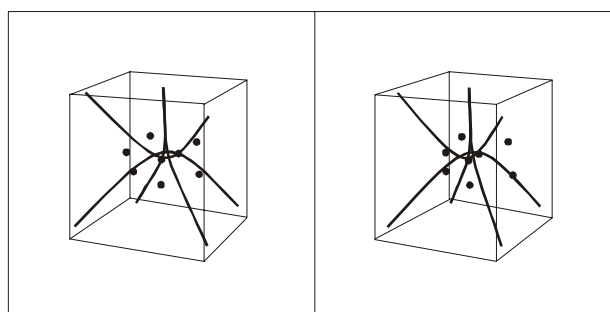
Para o diagrama de Voronoi em três dimensões, a fronteira de um poliedro Voronoi consiste de faces, que são chamadas *faces de Voronoi*. A fronteira de uma face de Voronoi consiste de segmentos de reta, semi-retas ou retas, que são chamadas de *extremidades de Voronoi*. A fronteira de uma extremidade de Voronoi consiste de pontos, que são chamados de *vértices de Voronoi*. A figura 9.1.5 mostra uma visão espacial de um diagrama de Voronoi em três dimensões obtida por GEN (1983) (veja também BOWYER, 1981).

Uma apresentação visual para um diagrama de Voronoi  $m$ -dimensional torna-se difícil quando  $m \geq 4$ . Formalmente, chama-se a uma fronteira de um poliedro de Voronoi  $m$ -dimensional por *faces de Voronoi de  $(m-1)$  dimensões*; a uma fronteira de uma face de Voronoi  $(m-1)$ -dimensional por *faces de Voronoi de  $(m-2)$  dimensões*;...; a uma fronteira de uma face de Voronoi em três dimensões por *faces de Voronoi de duas dimensões* ou simplesmente *faces de Voronoi*; a uma fronteira de uma face de Voronoi de duas dimensões por *face de Voronoi de uma dimensão* ou *extremidade de Voronoi*; a uma fronteira de uma face de Voronoi de uma dimensão por *faces de Voronoi de zero dimensão* ou *vértices de Voronoi*. Uma face de Voronoi de  $(m-1)$  dimensão é também chamada uma *face de Voronoi*.

Obviamente admite-se para  $m=1$  um diagrama de Voronoi de uma dimensão, ou um diagrama de Voronoi em uma linha (fig. 9.1.6). Neste caso, “um poliedro de Voronoi unidimensional” é uma semi-reta ou um segmento chamado de *linha de Voronoi*, e os vértices de Voronoi são os pontos finais das linhas de Voronoi.

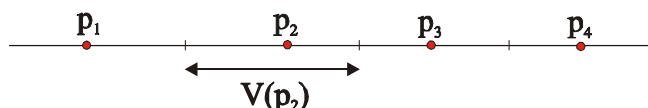
Finalmente nota-se que o ponto de fronteira entre duas linhas de Voronoi adjacentes é o ponto médio dos geradores daquelas linhas de Voronoi; o número de linhas de Voronoi ilimitado é também dois; o número de linhas de Voronoi adjacentes a uma linha de Voronoi é um dos dois. Por causa destas propriedades geométricas simples, um diagrama de uma linha de Voronoi é freqüentemente adotado em um contexto teórico simplificado para evitar argumentações geométricas complicadas. Dentro desse texto, deverá ser tratado freqüentemente o diagrama de Voronoi de dimensão dois ou mais.

FIGURA 9.1.5 – VISÃO ESPACIAL DO DIAGRAMA DE VORONOI



Para visualizar a figura 9.1.5, olhar o painel esquerdo com o olho direito e o painel direito com o olho esquerdo ao mesmo tempo, ou usar um observador espacial. Fonte: GEN (1983, p. 178).

FIGURA 9.1.6 – DIAGRAMA DE VORONOI SOBRE UMA LINHA



### 9.1.2 Definição de Uma Tecelagem de Delaunay (Triangulação de Delaunay)

Da mesma forma que um gráfico plano tem sido um gráfico dual, um diagrama de Voronoi será a “tecelagem dual”, chamada de tecelagem de Delaunay. Nesta seção será definida a tecelagem de Delaunay, e em particular a triangulação de Delaunay.

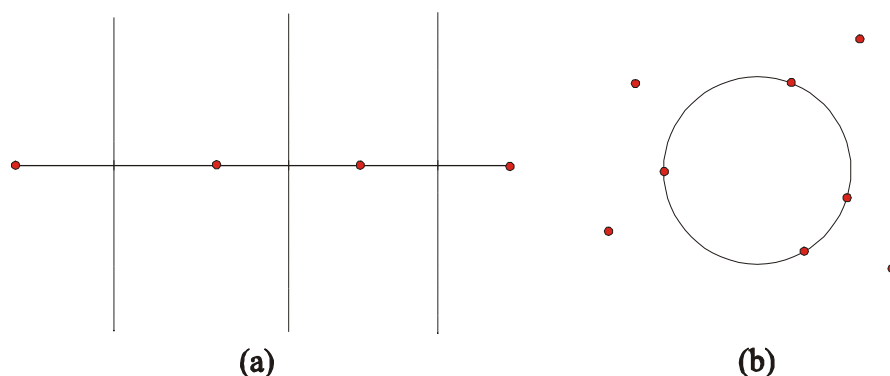
É considerado um diagrama de Voronoi no plano Euclidiano, e assume-se que os geradores do diagrama de Voronoi não estão sobre a mesma linha como na

figura 9.1.7a. Já que tal hipótese será adotada freqüentemente neste texto, deve-se classificá-la como:

### Hipótese D1 (hipótese de não colinearidade)

Para um conjunto de pontos dados  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^m$  ( $n \geq 2$ ),  $p_1, p_2, \dots, p_n$  não estão sobre a mesma linha.

FIGURA 9.1.7 – (A) GERADORES COLINEARES; (B) GERADORES COCIRCULARES



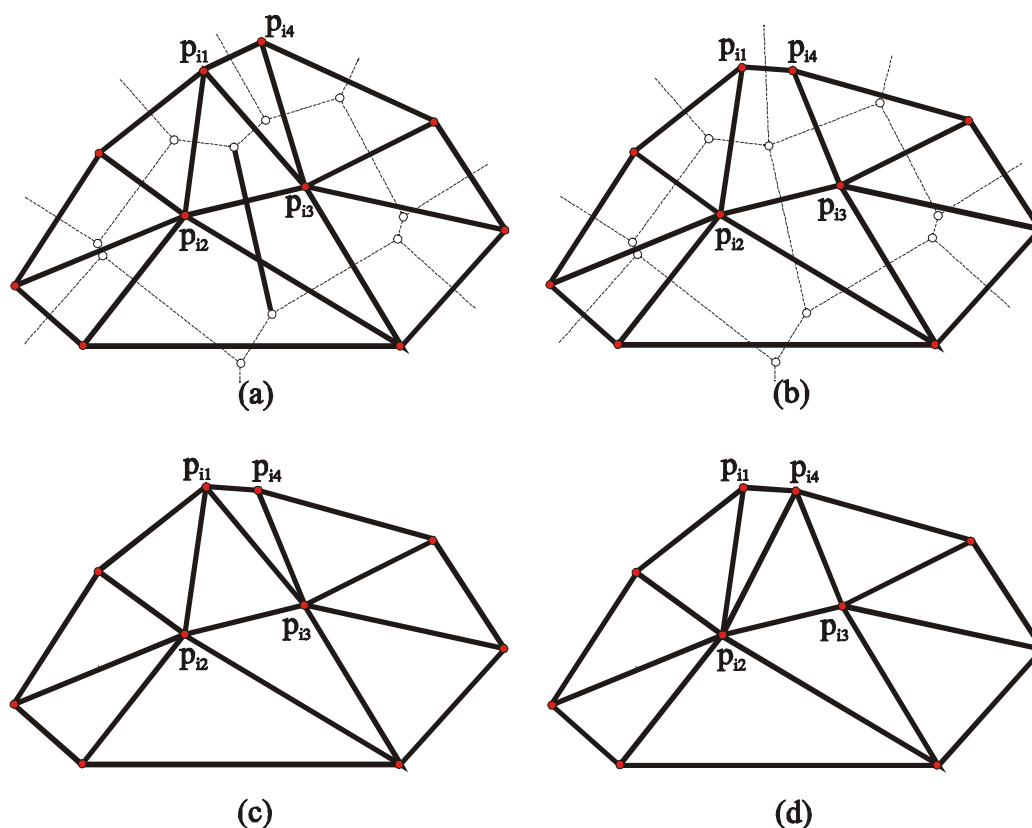
Em adição a esta hipótese assume-se que o número de pontos em  $P$  é três ou mais, mas finito. Note-se que a hipótese de não colinearidade implícita implica  $n \neq 2$  porque dois pontos sempre podem ser colocados sobre uma linha. Note-se também que estas duas hipóteses não estavam feitas na seção anterior, mas elas são feitas aqui porque, como poderá ser visto mais tarde, sem estas hipóteses, não se poderia obter a triangulação (pode-se obter um diagrama de Voronoi equilibrado quando  $n=2$  ou os geradores são colineares (as linhas tracejadas na figura 9.1.7a)).

Sujeito à hipótese de não colinearidade e  $3 \leq n < \infty$ , será mostrado agora como se obtém a triangulação de Delaunay de um diagrama de Voronoi (as linhas tracejadas na figura 9.1.8). Primeiro escolhe-se uma extremidade de Voronoi em um diagrama de Voronoi (o segmento forte interno na figura 9.1.8a). Esta extremidade de Voronoi é partilhada por dois polígonos de Voronoi. Unem-se os geradores (o círculo cheio) destes polígonos de Voronoi por um segmento de reta (o segmento de  $p_{i2}$  a  $p_{i3}$  na figura 9.1.8a). É levada para fora esta geração de linha com respeito a todas as extremidades de Voronoi no diagrama de Voronoi. Como resultado, é obtida uma segunda tecelagem do casco convexo dos geradores (as linhas sólidas na figura

9.1.8a). Na figura 9.1.8b é obtida mais uma tecelagem do casco convexo dos geradores (as linhas sólidas) obtidos de mais um diagrama de Voronoi (as linhas pontilhadas).

Na figura (9.1.8), tem-se que: (a) Triangulação de Delaunay; (b) pré-triangulação de Delaunay; (c) triangulação de Delaunay obtida de b; (d) outra triangulação de Delaunay obtida de b.

FIGURA 9.1.8 – DIAGRAMA (PONTILHADAS) E TRIANGULAÇÃO (LINHAS SÓLIDAS) DE VORONOI



Estas duas tecelagens são diferentes visto que a tecelagem no painel (a) consiste somente de triângulos, enquanto a tecelagem no painel (b) consiste também de formas quadrangulares. Chama-se a tecelagem anterior de *triangulação de Delaunay*. O último não é uma triangulação, mas desde que ele seja para ser triangulado, é chamado de *pré-triangulação de Delaunay*. Inspeccionando o diagrama de Voronoi indicado pelas linhas pontilhadas na figura 9.1.8b, é observado que uma pré-triangulação de Delaunay acontece quando o diagrama de Voronoi é degenerado.

Uma pré-triangulação de Delaunay pode ter polígonos contendo quatro ou mais vértices. Faz-se partição nesses polígonos não triangulares em triângulos por segmentos de retas que não se interceptem juntando-se os vértices. Por exemplo,

particionando o polígono quadrangular com vértices  $p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4}$  na figura 9.1.8b por segmentos  $\overline{p_{i1}p_{i3}}$ . Com este resultado, a pré-triangulação de Delaunay torna-se uma tecelagem consistindo somente de triângulos (fig. 9.1.8c). Esta tecelagem também é chamada de *triangulação de Delaunay* (e, algumas vezes, de *triangulação degenerada de Delaunay* para distinguir da triangulação de Delaunay dada acima). Deve-se notar que, como pode ser visto na figura 9.1.8c e 9.1.8d, a triangulação de Delaunay obtida da pré triangulação de Delaunay não é única; o polígono quadrangular  $p_{i1}p_{i2}p_{i3}p_{i4}$  pode ser triangulado também pelo segmento  $\overline{p_{i1}p_{i3}}$  ou segmento  $\overline{p_{i2}p_{i4}}$ . Ambas as triangulações são aceitas.

Uma triangulação de Delaunay deve consistir de no mínimo um triângulo, e esta condição é garantida pela hipótese de não colinearidade e  $3 \leq n < \infty$ . Se a hipótese de não colinearidade não é satisfeita, como na figura 9.1.7a, o procedimento acima não produz triângulos, mas segmentos, ou triângulos que degeneram nos segmentos.

Para a descrição acima, tem-se a seguinte definição.

### **Definição D1 (uma triangulação de Delaunay)**

Dado um diagrama de Voronoi em que os geradores não são colineares e são de número de três ou mais, mas finito, juntam-se todos os pares de geradores em que os polígonos de Voronoi partilham de uma mesma extremidade de Voronoi. Com este resultado, é obtida a segunda tecelagem. Se esta tecelagem consiste somente de triângulos, dá-se o nome de *triangulação de Delaunay*. Caso contrário, dividem-se os polígonos não triangulares em triângulos por segmentos que não se interceptam unindo os vértices. Com este resultado, a pré-triangulação de Delaunay torna-se uma triangulação. A esta também se chama *triangulação de Delaunay*.

Na definição D1 é construída uma tecelagem por geração de segmentos com respeito a cada extremidade de Voronoi. Alternativamente, pode-se construir uma tecelagem por geração de segmentos com respeito a cada vértice de Voronoi. Ainda que ambos os métodos sejam quase os mesmos, será mostrado aqui o último método porque ele poderá facilmente ser estendido para as definições no  $R^m$  (Definição D3).

Considere um diagrama de Voronoi  $V(P)$  gerado por um conjunto de pontos distintos  $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  ( $3 \leq n < \infty$ ) que satisfaz a hipótese de não colinearidade. Considere um vértice de Voronoi  $q_i$  e deixe  $V(p_{i1}), V(p_{i2}), \dots, V(p_{ik_i})$  ser os polígonos de Voronoi que partilham do vértice  $q_i$  de Voronoi. Note que os geradores  $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ik_i}$  são indexado no sentido horário na vizinhança  $q_i$  (fig. 9.1.8a). Para estes geradores, são construídos com segmentos  $\overline{p_{ij}p_{ij+1}}, j=1, 2, \dots, k_i$  ( $p_{ik_i+1}$  é lido como  $p_{i1}$ ). Se o polígono resultante é um triângulo (tal como na figura 9.1.8a), é deixado como está. Se ele não é triângulo (tal como o quadrilátero  $p_{i1}p_{i2}p_{i3}p_{i4}$  na figura 9.1.8b), é dividido o polígono em triângulos por segmentos de retas que não se interceptam juntando os vértices (fig. 9.1.8c e 9.1.8d). Desta maneira são construídos triângulos com respeito a todos os vértices de Voronoi em  $V(p)$ . Com este resultado, é obtido o conjunto de triângulos que formam uma tecelagem de um casco convexo de  $P$ ,  $CH(P)$ . Chama-se esta tecelagem de triangulação de Delaunay de  $CH(P)$  cobrindo  $P$ . Declarando um pouco mais matematicamente, tem-se a seguinte definição.

### Definição D2 (a Triangulação de Delaunay)

Deixe  $V(P)$  ser um diagrama de Voronoi generalizado por um conjunto de  $n$  pontos distintos  $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset R^2$  ( $3 \leq n < \infty$ ) que satisfaz a hipótese de não colinearidade;  $Q=\{q_1, q_2, \dots, q_{n_v}\}$  ser o conjunto de vértices de Voronoi em  $V(P)$ ;  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik_i}$  ser os vetores locados para os geradores cujos polígonos de Voronoi partilham de vértice  $q_i$ . É definido este conjunto por

$$T_i = \{x / x = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j x_{ij}, \text{ onde } \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j \in I_n\} \quad (9.1.10)$$

e seja

$$D = \{T_1, T_2, \dots, T_{n_v}\} \quad (9.1.11)$$

Se  $k_i=3$  para todos os  $i \in I_{n_v}$ , chama-se ao conjunto  $D$  *triangulação de Delaunay* de  $CH(P)$  cobrindo  $P$ . Se nele existe ao menos um  $k_i \geq 4$ , chama-se ao

conjunto  $D$  pré triangulação de Delaunay de  $CH(P)$  cobrindo  $P$ . É particionado  $T_i$  tendo  $k_i \geq 4$  em  $k_i - 2$  triângulos por segmentos que não se interceptam unindo os vértices, e denote os triângulos resultantes por  $T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ik_i-2}$  (note que  $T_{ik_i-2} = T_{i1} = T_i$  para  $k_i = 3$ ). Seja

$$D = \{T_{11}, \dots, T_{1k_1-2}, \dots, T_{n_v 1}, \dots, T_{n_v k_{n_v}-2}\}. \quad (9.1.12)$$

Chama-se o conjunto  $D$  de *triangulação de Delaunay* de  $CH(P)$  cobrindo  $P$ , e os triângulos em  $D$  de *triângulos de Delaunay*.

Como é visto na equação (9.1.10), um triângulo de Delaunay é definido como um conjunto fechado, e suas fronteiras consistem de segmentos de retas. Chamam-se estes segmentos de *extremidades de Delaunay*. Especificamente, se uma extremidade de Delaunay é partilhada por dois triângulos de Delaunay, chama-se de uma *extremidade interna de Delaunay* (as linhas leves na figura 9.1.8c); por outro lado, chama-se a uma *extremidade externa de Delaunay* (as linhas fortes na figura 9.1.8c). Quando  $V$  é não degenerado, uma extremidade de Voronoi e uma extremidade de Delaunay são um a um correspondentes. Conseqüentemente o número de extremidades de Voronoi em  $D$  é o mesmo que o das extremidades de Voronoi em  $V$ . Ao contrário de uma extremidade de Voronoi, uma extremidade de Delaunay é sempre finita. Chamam-se aos pontos finais de uma extremidade de Delaunay de *vértices de Delaunay*. Obviamente, todo vértice de Delaunay é um gerador de  $V(P)$ , e conseqüentemente o conjunto de vértices de Delaunay em  $D$  é dado por  $P$ .

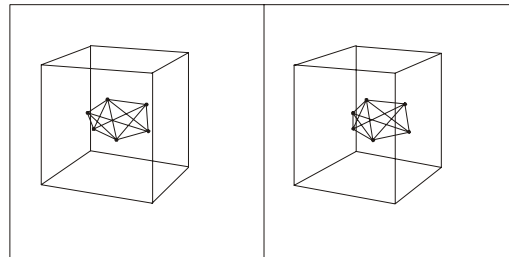
Nas definições D1 e D2 foi definida uma triangulação de Delaunay usando um diagrama de Voronoi. Isto não implica que uma triangulação de Delaunay deva ser sempre definida com um diagrama de Voronoi. Pode-se definir uma triangulação de Delaunay uma vez que um conjunto de pontos  $P$  é dado. Para indicar explicitamente esta propriedade, às vezes escreve-se  $D$  como  $D(P)$  como se escreve  $V$  como  $V(P)$ .

Já que a triangulação tem noções geométricas em duas dimensões, uma triangulação de Delaunay é definida somente em  $R^2$ . Pode-se, contudo, estender esta noção (Definição D2) para o espaço  $m$ -dimensional como a seguir.

### Definição D3 (uma tecelagem de Delaunay m-dimensional)

Deixe  $V(P)$  ser um diagrama de Voronoi gerado por  $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset R^m$  ( $3 \leq n < \infty$ ), onde os geradores satisfazem a hipótese de não linearidade;  $Q=\{q_1, q_2, \dots, q_{n_v}\}$  ser o conjunto de vértices de Voronoi (0-faces) em  $V(P)$ ;  $V(p_{i1}), V(p_{i2}), \dots, V(p_{ik_i})$  ser a  $(m-1)$ -faces de Voronoi dividindo  $q_i$ ;  $T_i$  ser o casco convexo  $m$ -dimensional cobrindo os geradores  $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{k_i}$ . Se  $k_i=m+1$  para todo  $i \in I_{n_v}$ , o conjunto  $D(P)=\{T_1, T_2, \dots, T_{n_v}\}$  consiste do  $m$ -dimensional simplificado. O conjunto  $D(P)$  é chamado de *tecelagem m-dimensional de Delaunay* de  $CH(P)$  cobrindo  $P$ . Se a este existe ao menos um  $k_i \geq m+2$ , chama-se o conjunto  $D(P)$  de *pré tecelagem m-dimensional de Delaunay* de  $CH(P)$  cobrindo  $P$ . É dividido  $T_i$  tendo  $k_i \geq m+2$  em  $k_i-m$  simplificado por hiperplanos que não se interceptam passando de um vértice a outro de  $T_i$ . Deixe  $T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ik_i-m}$  ser o resultados simplificados ( $T_{ik_i-m}=T_{i1}=T_i$  para  $k_i=m+1$ ), e  $D(P)=\{T_{11}, \dots, T_{1k_1-m}, \dots, T_{n_v1}, \dots, T_{n_vk_{n_v}-m}\}$ . Chama-se o conjunto  $D(P)$  de *tecelagem m-dimensional de Delaunay* de  $CH(P)$  cobrindo  $P$ , e a simplificação em  $D(P)$  uma *simplificação m-dimensional de Delaunay*.

FIGURA 9.1.9 – UMA VISÃO ESPACIAL DE UMA TETRAEDRALIZAÇÃO DE DELAUNAY



(olhar o painel da esquerda com o olho direito e o painel da direita com o olho esquerdo, ou usar um observador espacial). (Veja: GEN (1983, p. 78)).

Como definido na Definição D1 ou D2, uma tecelagem de Delaunay em duas dimensões é chamada de triangulação de Delaunay. Uma tecelagem de Delaunay em três dimensões é chamada de tetraedralização de Delaunay. A figura 9.1.9 mostra uma visão espacial de uma tetraedralização de Delaunay.



### 9.1.3 Propriedades Básicas do Diagrama de Voronoi

Tendo definido um diagrama de Voronoi na seção 9.1.1, deseja-se, nesta seção, observar suas propriedades geométricas. Serão consideradas principalmente as propriedades do diagrama de Voronoi no plano, mas algumas delas podem ser estendidas para o diagrama de Voronoi m-dimensional.

Embora já tenha sido declarada na Definição V2 que a região  $V(p_i)$  dada pela equação (9.1.1) é um polígono, esta propriedade é revista na Definição V3 que define um polígono de Voronoi em termos de semiplanos (equação (9.1.7)). Já que um semiplanos é um conjunto convexo e a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo, um polígono de Voronoi é um conjunto convexo. Já que os geradores são distintos, um polígono de Voronoi é não vazio. Como todo ponto no  $R^2$  é designado a pelo menos um dos geradores (Definição V1), os polígonos de Voronoi em  $V(P)$  são coletivamente exaustivos em  $R^2$ . Além disso, observando a Definição V3 deduz-se que  $V(p_i) \subset H(p_i, p_j)$ ,  $V(p_j) \subset H(p_j, p_i)$  e  $[H(p_i, p_j) \setminus \partial H(p_i, p_j)] \cap [H(p_j, p_i) \setminus \partial H(p_j, p_i)] = \emptyset$ , entende-se que esses polígonos de Voronoi são mutuamente exclusivos com exceção das fronteiras. Estas propriedades são óbvias para um diagrama normal de Voronoi, mas algumas delas podem não se sustentar para os diagramas generalizado de Voronoi. Para ressaltar este contraste, serão concentradas estas propriedades na Propriedade V1.

#### Propriedade V1

Deixe  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset R^2$  ( $2 \leq n < \infty$ ) ser um conjunto de pontos distintos. O conjunto  $V(p_i)$  definido por

$$V(p_i) = \{x / \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\| \text{ para } j \neq i, i, j \in I_n\} \quad (9.1.13)$$

é um polígono convexo não vazio, e  $V(P) = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}$  satisfazem

$$\bigcup_{i=1}^n V(p_i) = R^2 \quad (9.1.14)$$

$$[V(p_i) \setminus \partial V(p_i)] \cap [V(p_j) \setminus \partial V(p_j)] = \emptyset, i \neq j, i, j \in I_n. \quad (9.1.15)$$

O diagrama de Voronoi  $V(P)$  é assim uma única tecelagem para  $P$ .

É simples ver esta Propriedade V1 também considerada no  $R^m$  se o polígono é substituído por um poliedro e  $R^2$  é substituído por  $R^m$ . Considerando que um poliedro de Voronoi é um conjunto convexo, um poliedro de Voronoi finito às vezes é chamado um “polytope” de Voronoi.

Já que os polígonos de Voronoi cobrem o plano Euclidiano, é óbvio que pelo menos um polígono de Voronoi é infinito. Para a hipótese que  $n \geq 2$ , têm-se dois ou mais polígonos de Voronoi, alguns dos quais podem ser finitos. Quando os geradores são colineares, percebe-se ao observar a figura 9.1.7 que todos os polígonos de Voronoi são infinitos. Quando os geradores são não colineares, têm-se a Propriedade V2.

## Propriedade V2

Para um diagrama de Voronoi gerado por um conjunto de pontos distintos  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  ( $2 \leq n < \infty$ ) em  $R^2$ , um polígono de Voronoi  $V(p_i)$  é infinito se e somente se  $p_i \in \partial CH(P)$ . Prova em OKABE et al. (1992, p. 78).

## Propriedade V3

Para o diagrama de Voronoi gerado por um conjunto de pontos distintos  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  ( $2 \leq n < \infty$ ):

- i. Extremidades de Voronoi são retas infinitas se e somente se  $P$  for colinear.
- ii. Extremidade de Voronoi  $e(p_i, p_j)$  ( $\neq \emptyset$ ) é uma semi reta se e somente se  $P$  for não colinear e  $p_i$  e  $p_j$  sejam geradores consecutivos da fronteira de  $CH(P)$ .
- iii. Suponha que  $p_i$  e  $p_j$  dêem uma extremidade de Voronoi  $e(p_i, p_j)$ . Então esta extremidade é um segmento de reta finito se e somente se  $P$  for não colinear e ao menos um dos  $p_i, p_j$  esteja no interior de  $CH(P)$ .

Da Definição V3, nota-se que aquelas extremidades de Voronoi são parte dos bissetores, mas bissetores nem sempre geram extremidades de Voronoi. A propriedade

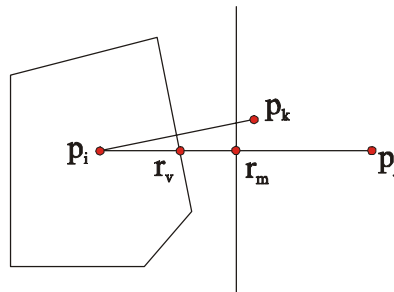
seguinte mostra uma condição suficiente para a geração de uma extremidade de Voronoi.

### Propriedade V4

O ponto gerador mais próximo de  $p_i$  gera uma extremidade de Voronoi de  $V(p_i)$ . (Prova: OKABE, et al., 1992, p. 79).

Para provar esta propriedade, deixe  $p_j$  ser o ponto gerador mais próximo de  $p_i$ , e suponha que a mediatriz  $b(p_i, p_j)$  não gera uma extremidade de Voronoi. Deixe  $r_m$  ser o ponto médio de  $\overline{p_i p_j}$  ( $r_m \in b(p_i, p_j)$ , figura 9.1.10). Considerando que  $b(p_i, p_j)$  não gera uma extremidade de Voronoi,  $r_m$  está fora de  $V(p_i)$ . Conseqüentemente  $\overline{r_m p_i}$  intercepta uma extremidade de Voronoi, seja ela  $e(p_i, p_k)$ , de  $V(p_i)$ , e deixe  $r_v$  ser este ponto de interseção. Considerando  $\overline{p_i p_k}/2 \leq \overline{p_i r_m} = \overline{p_i p_j}/2$ , nós temos  $\overline{p_i p_k} < \overline{p_i p_j}$ , mas isto contradiz que  $p_j$  seja o ponto mais próximo de  $p_i$ . Assim,  $b(p_i, p_j)$  gera a extremidade  $e(p_i, p_j)$  de Voronoi.

FIGURA 9.1.10 – ILUSTRAÇÃO PARA A PROPRIEDADE V4



### Propriedade V5

O ponto gerador mais próximo de  $p_i$  existe nos geradores cujos polígonos de Voronoi compartilham as extremidades de Voronoi de  $V(p_i)$ .

Esta propriedade é útil para se resolver problemas conhecidos, como os propostos a seguir.

### Problema P1 (o problema do par mais íntimo)

Para um conjunto de pontos distinto  $P$ , se a distância entre  $p_i \in P$  e  $p_j \in P$  é o mínimo entre as distâncias entre todos os possíveis pares de pontos em  $P$ , diz-se que o par  $\{p_i, p_j\}$  é o par mais íntimo. Determinado  $P$  ache o par mais íntimo.

### **Problema P2 (o problema de todo vizinho mais próximo)**

Determinado um conjunto de pontos distinto  $P$ , ache o vizinho mais próximo de pontos  $p_i$ , para todo  $p_i \in P$ .

A propriedade V5 sugere que, quando se resolvem problemas como os acima, não é necessário comparar todas as distâncias de  $p_i$  para o resto dos geradores; será necessário somente comparar as distâncias de  $p_i$  para os geradores cujos polígonos de Voronoi compartilham as extremidades de Voronoi de  $V(p_i)$ . Em algumas vezes o Problema P2 pode ser resolvido com esta comparação, sendo fácil de achar pares recíprocos. Um par  $\{p_i, p_j\}$  é um par recíproco (mais próximo) quando  $p_i$  é o vizinho mais próximo de pontos de  $p_j$  e  $p_j$  é o vizinho mais próximo de pontos de  $p_i$ . O par mais íntimo é achado nos pares recíprocos.

As propriedades V4 e V5 se preocupam com o gerador de ponto mais próximo de um ponto gerador. A propriedade seguinte se preocupa com o gerador de ponto mais próximo de um ponto arbitrário.

### **Propriedade V6**

O gerador  $p_i$  é o ponto gerador mais próximo do ponto  $p$  se e somente se  $V(p_i)$  contém  $p$ .

Embora esta propriedade seja bastante óbvia (isto é quase a definição de um polígono de Voronoi), ela é declarada porque é muito útil para se resolver o problema seguinte, KNUTH (1973).

### **Problema P3 (o problema da procura mais próxima)**

Dado um conjunto de pontos distintos  $P$ , ache o ponto vizinho mais próximo entre  $P$  e um determinado ponto  $p$  ( $p$  não é necessariamente um ponto em  $P$ ).

Um método ingênuo para se resolver o Problema P3 é achar a distância mínima entre as  $n$  distâncias,  $\{\|x-x_i\|, i \in I_n\}$ . Quando se tem somente um ponto para sondar, o cálculo não é tão árduo. Porém, se o número de pontos a sondar fica muito grande, o cálculo com este método ingênuo consome muito tempo. Para aliviar esta carga computacional a Propriedade V6 é muito útil. Em geral, quando uma tecelagem é determinada, o problema de achar uma região na qual um determinado ponto é sondado é chamado de *o problema de localização de ponto* (point-location problem). Usando métodos eficientes desenvolvidos na geometria computacional, como a técnica de “bucketing”, pode-se procurar eficazmente e achar em qual polígono de Voronoi existe o ponto pesquisado. Uma vez conhecido o polígono, o  $V(p_i)$ , então se sabe imediatamente pela Propriedade V6 que  $p_i$  é o ponto gerador mais próximo.

Um vértice de Voronoi também tem propriedades interessantes. Tome  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{n_v}\}$  como um conjunto de vértices de Voronoi de um diagrama de Voronoi gerado por  $P$ . Como um vértice  $q_i$  de Voronoi é compartilhado por três ou mais polígonos de Voronoi,  $V(p_{i1}), V(p_{i2}), \dots, V(p_{ik}), k \geq 3, p_{ij} \in P, j \in I_k$ , onde  $j$  é indexado no sentido anti-horário (fig. 9.1.11), três ou mais extremidades de Voronoi,  $e(p_{i1}, p_{i2}), \dots, e(p_{ik}, p_{i1})$ , se encontram no  $q_i$ . Recordando que  $e(p_{ij}, p_{ij+1})$  está na mediatriz, verifica-se que o vértice  $q_i$  de Voronoi está igualmente distante de  $p_{ij}$  e  $p_{ij+1}$ , isto é,  $\overline{q_i p_{ij}} = \overline{q_i p_{ij+1}}$ . Como isto é seguro para  $j \in I_k$  ( $k+1$  é lido como 1), têm-se  $\overline{q_i p_{i1}} = \dots = \overline{q_i p_{ik}}$  (as linhas pontilhadas na figura 9.1.11). Os pontos  $p_{i1}, \dots, p_{ik}$  estão conseqüentemente no mesmo círculo que é denotado por  $C_i$ .

Em seguida será mostrado que o círculo  $C_i$  é um círculo vazio. Suponha que o ponto  $p_i \in P \setminus \{p_{i1}, \dots, p_{ik}\}$  está dentro de  $C_i$ . Então  $\overline{q_i p_i} < \overline{q_i p_{ij}}$  para  $j=1, \dots, k$  (a linha de interseção na figura 9.1.11), significa que  $q_i$  deveria ser atribuído a  $V(p_i)$ . Conseqüentemente  $C_i$  é um círculo vazio. Desta forma, têm-se a Propriedade V7.

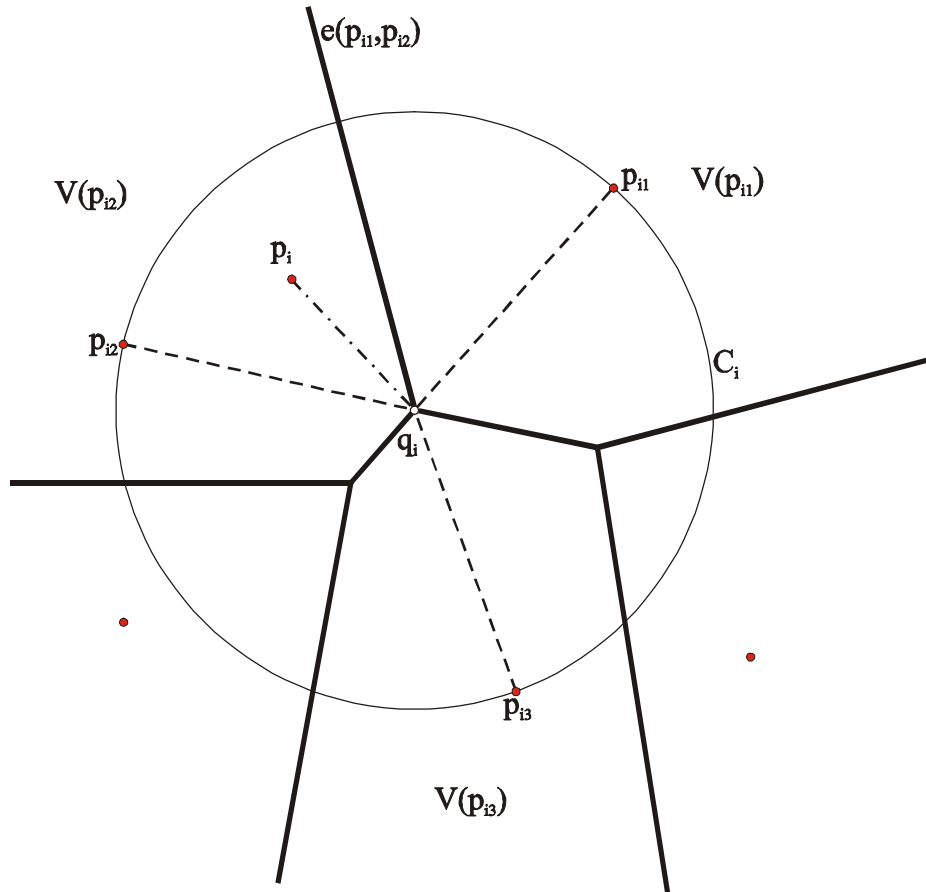
## Propriedade V7

Para todo vértice de Voronoi,  $q_i \in Q$ , em um diagrama de Voronoi, existe um

círculo vazio único  $C_i$  centrado em  $q_i$  que passa por três ou mais gerador. Através da suposição da não degeneração,  $C_i$  passa por exatamente três geradores.

Desta propriedade, a suposição de não degeneração é equivalente à seguinte hipótese.

FIGURA 9.1.11 – ILUSTRAÇÃO PARA A PROPRIEDADE V7



### Hipótese V2 (a hipótese da não cocircularidade)

Dado um conjunto de pontos  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$  ( $4 \leq n < \infty$ ), não existe um círculo  $C$ , tal que  $p_{i1}, \dots, p_{ik} \in P$ ,  $k \geq 4$  esteja em  $C$ , e todos os pontos em  $P \setminus \{p_{i1}, \dots, p_{ik}\}$  estejam fora de  $C_0$ .

Esta hipótese pode ser estendida a  $\mathbb{R}^m$  se for substituído o círculo por uma hiper-esfera e 4 por  $m+2$ . Neste caso, pode-se chamar a hipótese de hipótese de não cosferidade.

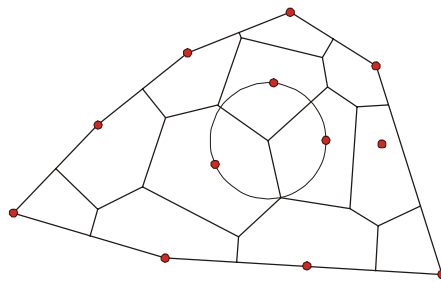
Para um determinado número de pontos  $P$  fixos, se um círculo não contém

nenhum ponto em seu interior, o círculo é chamado de círculo vazio. Imediatamente da Propriedade V7 é obtida a Propriedade V8.

### Propriedade V8

O círculo  $C_i$  na Propriedade V7 é o maior círculo vazio entre os círculos vazios centrados no vértice  $q_i$  de Voronoi.

FIGURA 9.1.12 – O MAIOR CÍRCULO VAZIO CUJO CENTRO ESTÁ DENTRO DA MALHA CONVEXA DE UM CONJUNTO DE PONTOS



### Propriedade V9

Deixe  $n$ ,  $n_e$  e  $n_v$  serem: o número de geradores, as bordas de Voronoi e os vértices de Voronoi de um diagrama de Voronoi em  $R^2$ , respectivamente ( $2 \leq n < \infty$ ).

Então

$$n_v - n_e + n = 1. \quad (9.1.16)$$

Exemplo: na figura 9.1.12 têm-se  $n_v=29$ ,  $n_e=40$  e  $n=12$ . Logo:  $29-40+12=41-40=1$ .

Como uma extensão desta propriedade, é obtida a Propriedade V10 da fórmula de Euler-Schlaflie.

### Propriedade V10

Deixe  $n_k$  ser o número de faces  $k$ -dimensional de Voronoi em um diagrama de Voronoi  $m$ -dimensional. Então,

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k n_k = (-1)^m. \quad (9.1.17)$$

Sob a suposição da não-colinearidade e  $3 \leq n < \infty$ , todo vértice no gráfico de Voronoi  $G(Q_{+1}, E_b)$  tem três extremidades (fronteiras) pelo menos. Conseqüentemente o número de fronteiras em  $G(Q_{+1}, E_b)$  não é menos que  $3(n_v+1)/2$  (o 2 no denominador implica que toda fronteira é contada duas vezes), isto é

$$n_e \geq \frac{3}{2} (n_v+1). \quad (9.1.18)$$

Substituindo esta relação na equação (9.1.16), obtém-se a Propriedade V11.

### Propriedade V11

Deixe  $n$ ,  $n_e$  e  $n_v$  serem: o número de geradores, as fronteiras de Voronoi e os vértices de Voronoi, de um diagrama de Voronoi em  $R^2$ , respectivamente, e assume-se que  $3 \leq n < \infty$ . Então

$$n_e \leq 3n - 6, \quad (9.1.19)$$

$$n_v \leq 2n - 5. \quad (9.1.20)$$

Embora esta propriedade tenha sido derivada considerando-se a não colinearidade, a Propriedade V11 não a requer, porque se os geradores são colineares, então  $n_v=0$  e  $n_e=n$ , para o qual as relações (9.1.19) e (9.1.20) são asseguradas para  $n \geq 3$ .

Quando um conjunto de geradores fixos  $P$  satisfaz a hipótese de não colinearidade com  $n \geq 3$ , todo polígono finito de Voronoi tem pelo menos três fronteiras de Voronoi, e todo polígono infinito de Voronoi tem pelo menos duas fronteiras de Voronoi. Observando estes fatos e recordando que o número de polígonos finitos de Voronoi é  $n - n_c$  e que dos polígonos infinitos de Voronoi é  $n_c$ , nota-se que o número de fronteiras não é menor que  $[3(n - n_c) + 2n_c]/2$  (o 2 no denominador implica que toda fronteira é contada duas vezes), isto é

$$n_e \geq [3(n - n_c) + 2n_c]/2. \quad (9.1.21)$$



Substituindo a equação (9.1.16) nesta relação, obtém-se a Propriedade V12.

### Propriedade V12

Deixe  $n$ ,  $n_e$ ,  $n_v$  e  $n_c$  serem: o número de polígonos de Voronoi, as fronteiras de Voronoi, os vértices de Voronoi e os polígonos infinitos de Voronoi de um diagrama  $V(P)$  de Voronoi, respectivamente, onde  $3 \leq n < \infty$  e  $p$  satisfaz a hipótese da não colinearidade. Então as seguintes relações ficam:

$$n_v \geq \frac{1}{2}(n - n_c) + 1, \quad (9.1.22)$$

$$n_e \geq 3n_v + n_c - 3. \quad (9.1.23)$$

Um polígono de Voronoi é determinado pela interseção de  $n-1$  semiplanos. Um polígono de Voronoi tem assim no máximo  $n-1$  fronteiras de Voronoi. Quando os geradores são colineares (fig. 9.1.7(a)), na maioria à esquerda e à direita dos polígonos de Voronoi há no mínimo uma fronteira de Voronoi. Assim, qual o número comum de fronteiras de Voronoi de um polígono de Voronoi? Da relação (9.1.19) e do fato de que toda fronteira de Voronoi é compartilhada por exatamente dois polígonos de Voronoi, nota-se que o número comum de fronteiras de Voronoi de um polígono de Voronoi é menor ou igual a  $2(3n-6)/n$ . Conseqüentemente é obtida a Propriedade V13.

### Propriedade V13

O número comum de fronteiras de Voronoi de um polígono de Voronoi não excede seis.

A relação (9.1.20) mostra que um possível número máximo de vértices de Voronoi em um diagrama de Voronoi bi-dimensional é 2. Para um diagrama de Voronoi  $m$ -dimensional, têm-se a seguinte propriedade.

### Propriedade V14

O número máximo,  $n_{\max}$ , de vértices de Voronoi em um diagrama de Voronoi

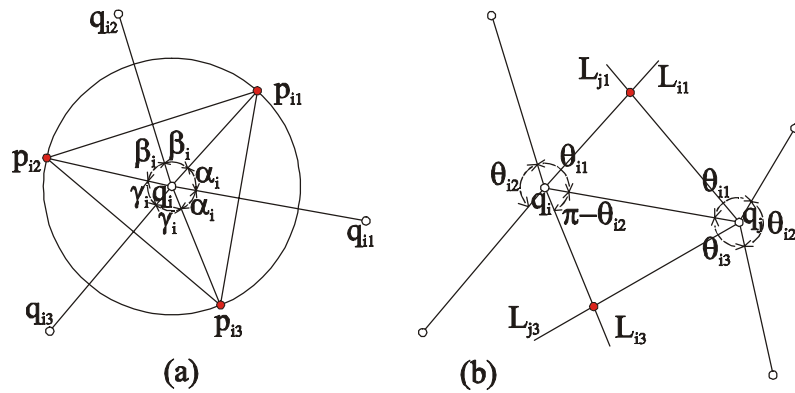
$m$ -dimensional satisfaz

$$\frac{n-1}{n-1-r} \binom{n-1-r}{r} \leq n_{\max} < 2 \binom{n-1-r}{r} \text{ para } m=2r, n>m+1, \quad (9.1.24)$$

$$\frac{(n-r-1)(nr-r-1)}{(r+1)(nr-r^2+1)} \binom{\lceil nr/(r+1) \rceil - r}{r-1} < n_{\max} < \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} \quad (9.1.25)$$

para  $m=2r-1, n>m+1$ .

FIGURA 9.1.13 – RECONHECIMENTO DOS GERADORES DAS FRONTEIRAS DE VORONOI



## Propriedade V15

Deixe  $\overline{q_i q_j}$  ser uma fronteira de Voronoi em um diagrama de Voronoi não degenerado,  $\theta_{ik}$  e  $\theta_{jk}$ ,  $k=1,2,3$ , ser o ângulo agudo de  $q_i$  e  $q_j$ , respectivamente, onde  $k$  é indexado no sentido anti-horário de  $\overline{q_i q_j}$  em  $q_i$  e sentido horário em  $q_j$  (fig. 9.1.13(b)). Deixe  $L_{ik}$  ( $L_{jk}$ ) ser a semi reta em radiando de  $q_i$  ( $q_j$ ) com  $\pi - \theta_{i2}$  ( $\pi - \theta_{j2}$ ) sendo o ângulo e com  $\overline{q_i q_j}$  o setor de  $\theta_{ik}$  ( $\theta_{jk}$ ),  $k=1,3$ . Então o ponto de interseção obtido de  $L_{i1}$  e  $L_{j1}$ , e que também, com a interseção de  $L_{i3}$  e  $L_{j3}$  geram o diagrama de Voronoi, compartilham o setor  $\overline{q_i q_j}$ .

## Propriedade V16

Uma tecelagem no plano que consiste em polígonos convexos cujos vértices

são em número de três é um diagrama de Voronoi se e somente se  $p_{i1}=p_{i2}=\dots=p_{ik}$ , assegurado para  $i \in I_{n_v}$ , onde  $p_{ij}$  foi definido na Propriedade anterior.

### Propriedade V17

O diagrama de Voronoi  $V(P)$  é obtido como a projeção ortográfica das faces do poliedro feita pela interseção de todo o semi-espço superior  $H_i$ ,  $i \in I_n$ , sobre o plano  $x-y$  onde o semi-espço superior  $H_i$  é a região acima do plano tangencial ao parabolóide para se descobrir o ponto gerador  $p_i$ .

## 9.2 Generalizações dos Diagramas de Voronoi

### 9.2.1 Diagrama de Voronoi com Pesos

No diagrama normal de Voronoi assume-se implicitamente que os geradores são indiferentes (independentemente da localização) ou que cada ponto gerador tem o mesmo peso. Em algumas aplicações práticas, porém, esta suposição pode não ser apropriada. Em geral, é mais apropriado assumir que aqueles pontos geradores tenham pesos diferentes que refletem a propriedade variável dos pontos geradores, por exemplo, o tamanho da população de um povoado, o número de funções em um shopping center, a quantidade de emissões de um poluente, o tamanho de um átomo em uma estrutura cristalina, e assim sucessivamente. Esta seção mostra a família de diagrama de Voronoi generalizados que levam em conta estes pesos diferentes em termos de “distância com peso”  $d_w(p, p_i)$ .

Considere um conjunto de pontos distintos,  $P=\{p_1, \dots, p_n\} \subset R^m$  ( $2 \leq n < \infty$ ) ( $A=P$ ,  $S=R^m$ ) e determine um peso a cada  $p_i$  que se relaciona a alguma propriedade variável do fenômeno, como essas mencionadas acima. Será representado este peso por um conjunto de parâmetros,  $W_i=\{w_{i1}, \dots, w_{in_w}\}$  (se  $n_w=1$ , é escrito  $w_i$  para  $W_i$ ). Com este peso é definida uma distância,  $d_w(p, p_i)$  de  $p$  para  $p_i$ , chamada distância com peso que será especificada mais adiante. A região de domínio de  $p_i$  sobre  $p_j$  com a distância com

peso é escrita como

$$\text{Dom}(p_i, p_j) = \{p / d_w(p, p_i) \leq d_w(p, p_j)\} \quad j \neq i. \quad (9.2.1)$$

Deixe

$$V(p_i) = \bigcap_{i=1}^n \text{Dom}(p_i, p_j), \quad (9.2.2)$$

e  $V(P, d_w, R_m) = V_w = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$ . Se a região de domínio dada pela equação (9.2.1) é bem comportada, o conjunto  $V_w$  resulta num diagrama generalizado de Voronoi. O nome dado a este diagrama generalizado de Voronoi é *diagrama de Voronoi por pesos* generalizado por  $P$  com peso  $\{W_1, \dots, W_n\}$ , e ao conjunto  $V(p_i)$  é *região de Voronoi por pesos* associada ao  $p_i$ .

Considerando que a distância com peso permite muitas formas funcionais, existem possivelmente muitos diagramas de Voronoi com pesos. Em seguida será mostrado um tipo de diagramas de Voronoi com pesos que aparece mais freqüentemente. É trabalhado principalmente em  $R^2$ , mas a extensão para  $R^m$  é dada conceitualmente.

## Diagrama de Voronoi Multiplicativo por Pesos

Este tipo de diagrama de Voronoi por pesos é caracterizado pela distância com peso dada por

$$d_{mw}(p, p_i) = \frac{1}{w_i} \|x - x_i\|, \quad w_i > 0. \quad (9.2.3)$$

Esta distância é chamada de *distância multiplicativa por pesos* ou de *MW-distância*. A região de domínio com a MW-distância é escrita como

$$\text{Dom}(p_i, p_j) = \{x / \frac{1}{w_i} \|x - x_i\| \leq \frac{1}{w_j} \|x - x_j\|\}, \quad i \neq j. \quad (9.2.4)$$

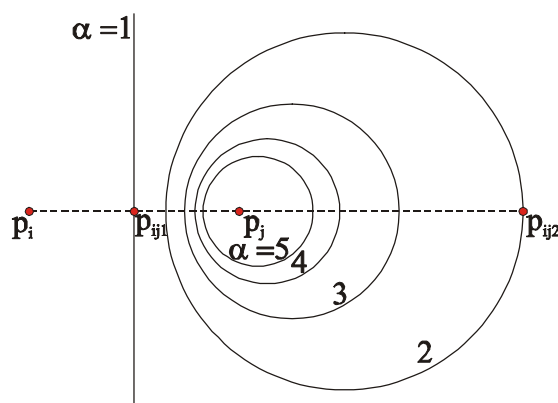
Depois de alguns passos do cálculo da equação (9.2.4), é obtida a mediatriz como

$$b(p_i, p_j) = \{x / \|x - \frac{w_i^2}{w_i^2 - w_j^2} x_j + \frac{w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} x_i\| = \frac{w_i w_j}{w_i^2 - w_j^2} \|x_j - x_i\|\}, w_i \neq w_j, i \neq j. \quad (9.2.5)$$

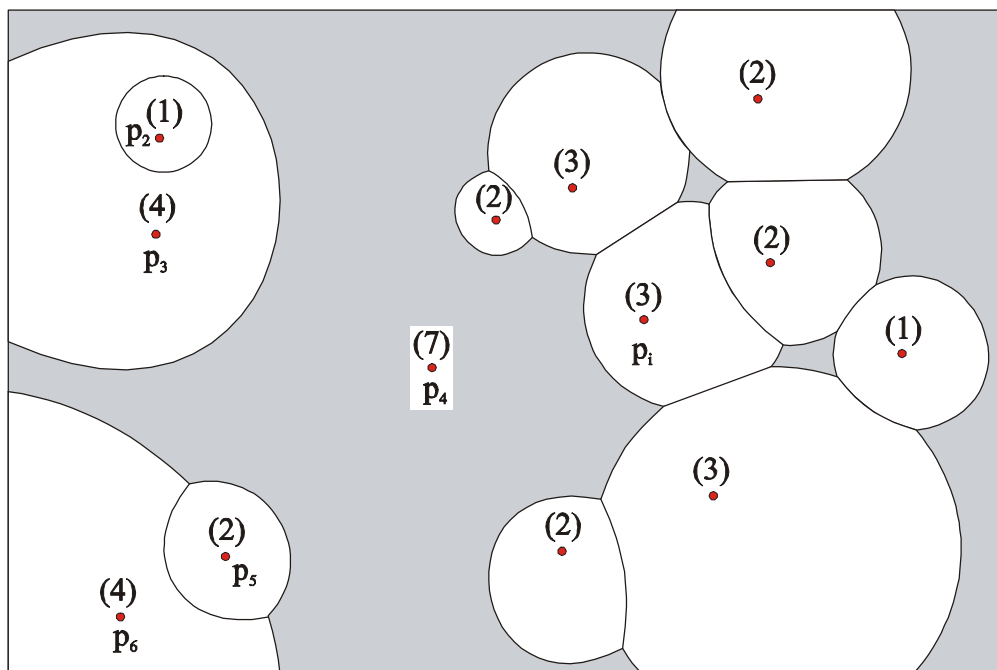
Esta mediatriz é o enfoque de um ponto  $p$  tal que satisfaça a condição de que a distância de  $p$  aos pontos fixos,  $w_i^2 x_j / (w_i^2 - w_j^2) - w_j^2 x_i / (w_i^2 - w_j^2)$ , é constante. Obviamente, este enfoque é um círculo em  $R^2$ . Este círculo passa pelos pontos de divisão interior e exterior (denotados por  $p_{ij1}$  e  $p_{ij2}$ ) de  $\overline{p_i p_j}$  com razão  $w_i, w_j$ , e seu diâmetro é determinado através de  $\overline{p_{ij1} p_{ij2}}$  (fig. 9.2.1). Na geometria clássica este círculo é conhecido como o círculo de Apollonius. A Figura 9.2.1 mostra o círculo de Apollonius representando a mediatriz definida com a MW-distância para várias razões  $\alpha = w_i / w_j$  (é assumido que  $w_i / w_j \geq 1$  sem perda de generalidade). No caso especial de  $\alpha = 1$  ( $w_i = w_j$ ), a mediatriz se torna uma linha reta, ou um círculo com um raio infinito.

Na equação (9.2.3) é usada a notação  $1/w_i$ , mas matematicamente é aceito também somente  $w_i$ . Na equação (9.2.3) é adotada  $1/w_i$  porque, como pode ser visto na figura 9.2.1, a região de domínio de  $p_i$  em cima de  $p_j$  fica maior aumentando o peso  $w_i$  (ou  $\alpha$ ).

Considerando que o círculo de Apollonius divide  $R^2$  em duas regiões disjuntas, a mediatriz com a MW-distância é regular e também bem comportada. Assim o conjunto  $V(P, d_{mw}, R^2) = V_{mw} = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$  dá um diagrama de Voronoi generalizado onde  $V(p_i)$  é determinado através da equação (9.2.2) com a equação (9.2.4). O nome dado a este diagrama de Voronoi generalizado é *diagrama de Voronoi multiplicativo com pesos* gerado por  $P$  com a MW-distância ou *diagrama MW-Voronoi* de  $P$  com  $d_{mw}(p, p_i)$  (AURENHAMMER e EDELSBRUNNER, 1984; AURENHAMMER, 1988; ASH e BOLKER, 1986, chamam a isto de uma tecelagem de Dirichlet circular). O conjunto  $V(p_i)$  é chamado de *região do Voronoi multiplicativo com pesos* associados com  $p_i$  ou para abreviar, *região MW-Voronoi* de  $p_i$ . As figuras 9.2.1 e 9.2.2 mostram o diagrama MW-Voronoi no plano. O diagrama MW-Voronoi reduz-se ao diagrama normal de Voronoi quando  $w_i$  é uma constante igual para todo  $i \in I_n$ . Assim pode-se considerar o diagrama MW-Voronoi como uma generalização do diagrama normal de Voronoi.

FIGURA 9.2.1 – VORONOI MULTIPLICATIVO POR PESO PARA  $N=2$ 

As mediatrizes com distância multiplicativa com pesos para vários  $\alpha=w_i/w_j=1,2,3,4,5$ , ou diagrama de Voronoi multiplicativo por peso para  $n=2$ .

FIGURA 9.2.2 – UM DIAGRAMA DE VORONOI MULTIPLICATIVO POR PESO EM  $\mathbb{R}^2$ 

Os números nos parênteses representam os pesos associados aos geradores.

Para observar as propriedades geométricas de um diagrama MW-Voronoi, basta observar a figura 9.2.2, onde os números nos parênteses representam pesos associados aos geradores. Primeiro,  $V(p_1)$  não é convexo. Segundo,  $V(p_2)$  está contido em  $V(p_3)$  ou  $V(p_3)$  tem um buraco. Terceiro,  $V(p_4)$ , indicado pela região sombreada, não é conectado. Quarto, os pesos das regiões MW-Voronoi adjacente a uma região MW-Voronoi convexa, tome  $V(p_5)$ , não é menor que o peso da região MW-Voronoi

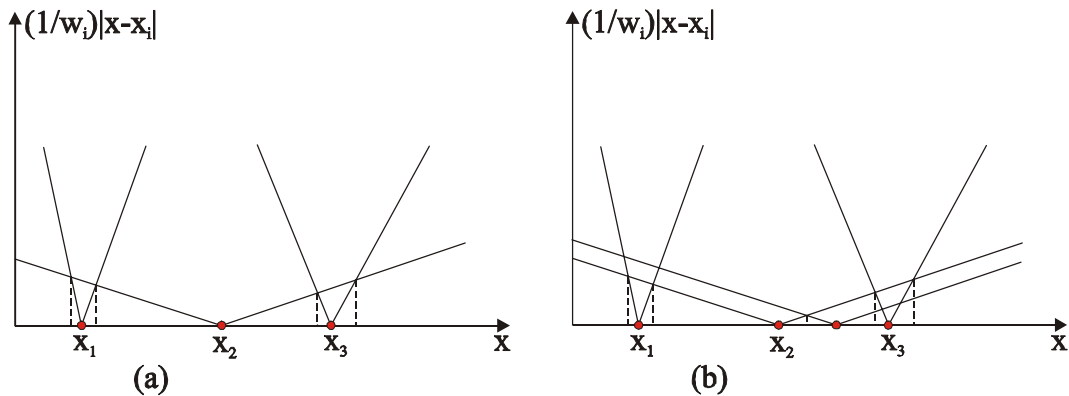
convexa ( $w_5 < w_4, w_6$ ). Pode-se entender esta propriedade de convexidade da região de domínio na figura 9.2.1 e o fato que  $V(p_i)$  é a interseção das regiões de domínio. Quinto, da mesma figura e da mesma equação, nota-se que aquele  $V(p_i)$  não é vazio porque os pesos são finitos. Para resumir, têm-se as propriedades seguintes:

### Propriedade MW1

Uma região MW-Voronoi é um conjunto não vazio; não precisa ser convexo, ou conectado; e pode ter buraco(s). Uma região MW-Voronoi  $V(p_i)$  é convexa se e somente se os pesos das regiões MW-Voronoi adjacentes não forem menores que  $w_i$ .

Para observar outra propriedade geométrica, será descrito um diagrama MW-Voronoi unidimensional onde é mostrado o valor de  $|x-x_i|/w_i$  no eixo vertical. Obviamente, o declive  $|x-x_i|/w_i$  fica mais aplainado com os aumentos do peso  $w_i$ . Da figura 9.2.3(a) é notado que o gerador cujo peso é eventualmente o maior domina os lugares longe das localizações dos geradores; por conseguinte, a região MW-Voronoi do peso maior é infinita. Contudo, quando dois ou mais geradores têm o mesmo peso maior como na figura 9.2.3(b), as regiões maiores à direita e à esquerda de Voronoi são infinitas. Generalizando estas propriedades em  $\mathbb{R}^2$ , é obtida a propriedade seguinte.

FIGURA 9.2.3 – DIAGRAMAS MW-VORONOI EM  $\mathbb{R}$



### Propriedade MW2

Deixe  $w_{\max} = \max_j \{w_j, j \in I_n\}$  e  $P_{\max}$  ser o subconjunto de  $P$  dado por  $P_{\max} = \{p_j / w_j = w_{\max}\}$ . Uma região MW-Voronoi  $V(p_i)$  é infinita se e somente se  $p_i \in P_{\max}$

e  $p_i$  estiver sobre a fronteira de  $CH(P_{\max})$ .

Se o gerador com o peso máximo é único, somente uma região MW-Voronoi é infinita. Um exemplo é mostrado pela região MW-Voronoi sombreada na figura 9.2.1.

É observado na figura 9.2.1 que a mediatriz  $b(p_i, p_j)$  é tanto um círculo como uma linha reta. Na figura 9.2.2 é verificada que a fronteira de Voronoi compartilhada por  $V(p_4)$  e  $V(p_6)$  é desconectada. Desta observação tem-se a propriedade seguinte com respeito às extremidades:

### **Propriedade MW3**

Duas regiões MW-Voronoi podem compartilhar fronteiras desconectadas. Uma fronteira é um arco circular se e somente se os pesos das regiões MW-Voronoi que compartilham a fronteira forem diferentes; uma fronteira é uma linha reta se e somente se os pesos das regiões MW-Voronoi que compartilham a fronteira forem iguais.



## 10 ANEXO 2 - APROXIMAÇÕES CONTÍNUAS

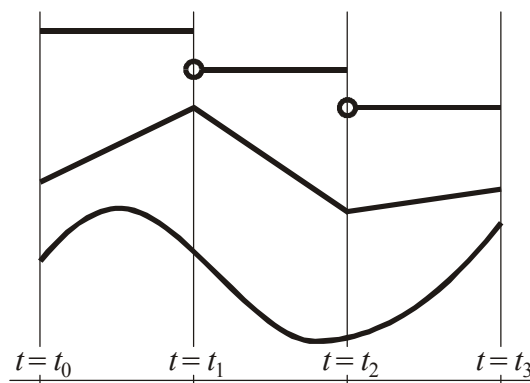
Dados de PERSIANO (1996). Ver também BOOR (1987).

### 10.1 Modelos Splines

Uma spline polinomial é uma função polinomial por partes. Splines de grau  $n$  são formadas por polinômios de grau  $n$  e possuem derivadas contínuas até a ordem  $n-1$  (a maior ordem de diferenciabilidade que as distingue de simples polinômios). O exemplo mais simples de spline é uma função constante por intervalos – não é sequer contínua. Splines de grau 1 são diferenciáveis e seus gráficos conformam-se por arcos de parábola em concordância. De modo geral, caracteriza-se o espaço de splines pelo grau dos polinômios que a compõem e pela seqüência de nós – os extremos dos intervalos de validade de cada polinômio. No exemplo (fig. 10.1), a spline de grau 0 não é contínua, a de grau 1 é contínua e não diferenciável, a terceira é quadrática e diferenciável.

Será denotado por  $S^n(t_0, t_1, \dots, t_m)$  o espaço de todas as splines de grau  $n$ , que apresentem derivadas contínuas até ordem  $n-1$  em todos os seus  $m$  nós  $(t_0, t_1, \dots, t_m)$ . Assim,  $S^2(1, 2, 3, 3.5, 7)$  é o espaço de todas as splines quadráticas diferenciáveis com nós em  $(1, 2, 3, 3.5, 7)$ . Onde o conjunto de nós estiver bem definido, o espaço de spline será denotado apenas por  $S^n$ , evitando sobrecarregar a notação.

FIGURA 10.1 – EXEMPLOS DE SPLINES DE GRAUS 0, 1 E 2.



## 10.2 Interpolação com splines

Dados os valores reais  $(f_0, f_1, \dots, f_m)$  associados à lista ordenada de parâmetros  $(u_0, u_1, \dots, u_m)$ , determinar  $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de modo a:

$$S(u_i) = f_i, \text{ com } i = 0, 1, \dots, m \quad (10.1)$$

Na determinação de uma spline que resolva esse problema, a seleção mais natural para o conjunto de nós da spline é tomá-los como sendo os próprios  $(u_0, u_1, \dots, u_m)$ .

Nessas condições só há uma solução  $S$  da equação (10.1) no espaço das splines de grau 1,  $S^1(u_0, u_1, \dots, u_m)$ :

$$S(u_i) = \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_i} f_i + \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} f_{i+1}, \text{ para } u \in [u_i, u_{i+1}]$$

ou seja, em cada intervalo  $[u_i, u_{i+1}]$ ,  $S$  coincide com o interpolador linear dos valores  $f_i$  e  $f_{i+1}$ . Essa solução é simples de ser computada mas apresenta descontinuidade de derivada nos nós.

O problema (10.1) aceita como soluções diversas splines de grau 2, como observa-se a seguir. Sejam  $(a_i, b_i, c_i)$ , com  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , os coeficientes algébricos do polinômio quadrático de uma spline  $S \in S^2$  no intervalo  $[u_i, u_{i+1}]$ . Para  $S$  resolver (10.1), estes coeficientes devem satisfazer, para cada  $i$  entre 0 e  $m-1$ , ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} a_i + b_i u_i + c_i (u_i)^2 &= f_i \\ a_i + b_i u_{i+1} + c_i (u_{i+1})^2 &= f_{i+1} \end{aligned} \quad (10.2)$$

Para satisfazer aos requisitos de diferenciabilidade, a spline  $S$  deve, para cada nó interno, atender também a:

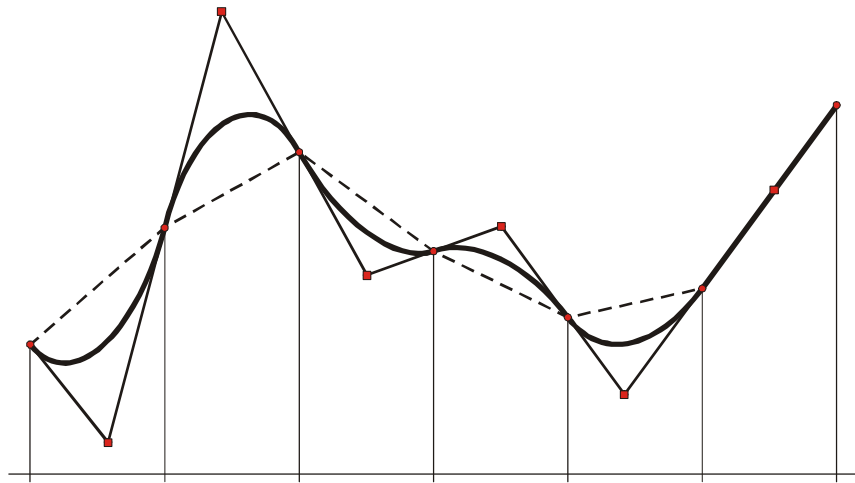
$$b_i + 2c_i u_i = b_{i+1} + 2c_{i+1} u_i \text{ com } i = 0, 1, \dots, m-2$$

de forma a igualar as derivadas à esquerda e à direita de cada nó interno  $u_i$ . O sistema

completo contém  $3m-1$  equações ( $2m$  de interpolação e  $m-1$  de diferenciabilidade) envolvendo  $3m$  coeficientes como incógnitas (são  $m$  intervalos), resultando 1 grau de liberdade na definição de  $S$ , pois as equações são linearmente independentes.

A spline ilustrada na figura 10.2, interpola os dados com derivada segunda nula no último intervalo. O ponto de Bézier intermediário de cada quadrática está marcado com um quadrado.

FIGURA 10.2 – EXEMPLO DE SPLINE QUADRÁTICA INTERPOLADORA DOS VALORES MARCADOS COM CÍRCULOS.



A resolução do sistema é simples, pois da equação (10.2) pode-se exprimir os demais coeficientes em termos dos  $c_i$ :

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{u_{i+1} - u_i} - c_i(u_{i+1} + u_i)$$

$$a_i = f_i - b_i u_i - c_i(u_i)^2$$

Substituindo-se estas expressões na equação de igualdade das derivadas, pode-se exprimir  $c_i$  em termos de  $c_{i+1}$ :

$$c_i = \frac{1}{\Delta u_i} \left( \frac{\Delta f_{i+1}}{\Delta u_{i+1}} - \frac{\Delta f_i}{\Delta u_i} - c_{i+1}(\Delta u_i + \Delta u_{i+1}) \right) \text{ com } i = 0, 1, \dots, m-2$$

onde  $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$ .

O sistema de  $m-1$  equações nos  $m$  coeficientes  $c_i$  admite várias soluções. Ele

torna-se um sistema triangular de fácil resolução ao acrescentarmos uma equação fixando, por exemplo,  $c_m$ . A figura (10.2) exemplifica uma solução de um desses problemas.

A spline quadrática que interpola os dados não possui derivada segunda contínua. Essas descontinuidades são visualmente perceptíveis e nada agradáveis. Nas curvas construídas com elas, isto causa descontinuidades de curvatura do mesmo tipo que se observa quando se unem em concordância dois arcos de círculos distintos. Se um veículo percorresse a curva, no ponto de descontinuidade da curvatura seria necessária uma mudança instantânea do ângulo do volante para manter-se o veículo dentro da curva. Splines quadráticas não são nada recomendáveis para o traçado de estradas.

Para resolver-se o problema de interpolação com splines duplamente diferenciáveis é necessário considerar-se splines de grau 3. Então, a cada intervalo passa-se a ter 4 coeficientes, formando um total de  $4m$  incógnitas no sistema. A cada nó interno, os coeficientes devem satisfazer às mesmas  $2m$  equações de interpolação e mais 2 equações de continuidade de derivada primeira e de derivada segunda compondo um total de  $4m-2$  equações. Se  $p_i$  é o polinômio cúbico do  $i$ -ésimo intervalo, essas condições são:

$$p_i(u_i) = f_i \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, m-1$$

$$p_i(u_{i+1}) = f_{i+1} \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\frac{dp_i(u_{i+1})}{du} = \frac{dp_{i+1}(u_{i+1})}{du} \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, m-2$$

$$\frac{d^2 p_i(u_{i+1})}{du^2} = \frac{d^2 p_{i+1}(u_{i+1})}{du^2} \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, m-2$$

Como essas equações são linearmente independentes, há 2 graus de liberdade nas suas soluções. Usualmente, se fixa uma solução impondo-se a anulação das derivadas segundas da spline nos nós extremos.

Uma forma conveniente de escrever-se o sistema é em termos dos valores das derivadas primeiras da spline nos nós. Se  $d_i$  é o valor da derivada primeira da spline cúbica  $S$  no nó  $u_i$ , o polinômio cúbico  $p_i$  no intervalo  $[u_i, u_{i+1}]$  pode ser descrito na base hermitiana por:

$$p_i(u) = f_i H_{00}^3 \left( \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \right) + f_{i+1} H_{01}^3 \left( \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \right) + d_i \Delta u_i H_{10}^3 \left( \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \right) + d_{i+1} \Delta u_i H_{11}^3 \left( \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \right) \quad (10.3)$$

As frações nessas expressões provêm a necessária reparametrização do intervalo  $[u_i, u_{i+1}]$  no intervalo  $[0, 1]$ . A derivada segunda de  $p_i$  possui portanto a forma:

$$\frac{d^2 p_i(u)}{du^2} = \frac{f_i}{(\Delta u_i)^2} \frac{d^2 H_{00}^3}{dv^2} + \frac{f_{i+1}}{(\Delta u_i)^2} \frac{d^2 H_{01}^3}{dv^2} + \frac{d_i}{\Delta u_i} \frac{d^2 H_{10}^3}{dv^2} + \frac{d_{i+1}}{\Delta u_i} \frac{d^2 H_{11}^3}{dv^2}$$

onde as derivadas segundas dos  $H_{ij}^3$  são avaliadas em  $\frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i}$ .

Levando em conta as expressões dos polinômios de Hermite, a avaliação da derivada segunda de  $p_i$  nos extremos do intervalo  $[u_i, u_{i+1}]$  simplifica-se:

$$\frac{d^2 p_i(u_i)}{du^2} = \frac{1}{(\Delta u_i)^2} (-6f_i + 6f_{i+1} - 4d_i \Delta u_i - 2d_{i+1} \Delta u_i)$$

$$\frac{d^2 p_i(u_{i+1})}{du^2} = \frac{1}{(\Delta u_i)^2} (6f_i - 6f_{i+1} + 2d_i \Delta u_i + 4d_{i+1} \Delta u_i)$$

e agora se pode exprimir a condição de continuidade da derivada segunda nos nós em termos dos  $d_i$ :

$$\frac{1}{\Delta u_i} \left( -6 \frac{\Delta f_i}{\Delta u_i} + 2d_i + 4d_{i+1} \right) = \frac{1}{\Delta u_{i+1}} \left( 6 \frac{\Delta f_{i+1}}{\Delta u_{i+1}} - 4d_{i+1} - 2d_{i+2} \right)$$

ou, equivalentemente, por:

$$\Delta u_{i+1}d_i + 2(\Delta u_i + \Delta u_{i+1})d_{i+1} + \Delta u_id_{i+2} = 3 \left( \frac{\Delta f_i \Delta u_{i+1}}{\Delta u_i} + \frac{\Delta f_{i+1} \Delta u_i}{\Delta u_{i+1}} \right)$$

Para a unicidade da solução, usa-se em geral a anulação da derivada segunda da spline nos nós extremos; essas duas condições expressas em termos dos  $d_i$  reduzem-se a:

$$2d_0 + d_1 = 3 \frac{\Delta f_0}{\Delta u_0}$$

$$d_{m-1} + 2d_m = 3 \frac{\Delta f_{m-1}}{\Delta u_{m-1}}$$

O sistema de equações resultante é um sistema tri-diagonal. Um caso simplificado que será ilustrado ocorre quando os nós são igualmente espaçados:  $\Delta u_i = \Delta u$ . Nesse caso, o sistema exhibe a forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\Delta f_0/\Delta u \\ 3(\Delta f_0 + \Delta f_1)/\Delta u \\ 3(\Delta f_1 + \Delta f_2)/\Delta u \\ \vdots \\ 3\Delta f_{m-1}/\Delta u \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

Os valores  $d_i$  que resolvem o sistema juntamente com os dados  $f_i$  e  $u_i$  compõem a spline solução por meio da equação (10.3).

O sistema (10.4) pode ser resolvido pelo método de Gauss; no entanto, convém explorar-se a tri-diagonalidade da matriz evitando seu armazenamento completo e operações desnecessárias com os elementos nulos. Na primeira fase, triangulariza-se a matriz através de operações de linha, eliminando-se a diagonal secundária inferior. Essas operações alteram apenas os elementos da diagonal e os elementos do lado esquerdo do sistema. No algoritmo codificado a seguir, esses elementos são armazenados nos vetores D e E respectivamente.

Após a triangulação, os valores dos  $d_i$  solução podem ser calculados por substituição, operando de baixo para cima.

A spline solução do problema de interpolação é globalmente dependente dos

dados. Se em um dos dados a interpolar,  $f_i$ , sofrer uma alteração, o vetor  $E$  do sistema após a triangularização da matriz ficará alterado a partir da sua  $i$ -ésima posição. No entanto, ao se aplicar a substituição para obter-se os  $d_i$ , todos os seus valores sofrerão alterações. Isso indica que o valor da solução  $S$  do problema de interpolação depende, em cada ponto do seu domínio, de todos os valores  $f_i$  a interpolar. A alteração de qualquer deles altera o valor da spline em todos os pontos do domínio exceto nos  $u_i$ .

### 10.3 Modelos Bivariados

Uma forma simples de criar-se uma superfície paramétrica é mover-se a curva no espaço deformando-a ao longo de seu trajeto. Para mover-se a curva, basta moverem-se os seus pontos de controle  $p^i$ . Considere uma curva paramétrica definida por uma função  $p$  de uma variável, polinomial, spline, ou qualquer outra, expressa como combinação de funções  $C_i$  de uma base qualquer:

$$p(s) = \sum_{i=0}^n p^i C_i(s)$$

onde os  $p^i$  são os pontos de controle da curva (é claro, então, que as funções da base particionam a unidade). Suponha que cada ponto  $p^i$  movimenta-se ao longo de uma trajetória que também é expressa em termos de uma base ( $D_j$ ), possivelmente distinta de ( $C_i$ ):

$$p^i(t) = \sum_{j=0}^m p^{i,j} D_j(t)$$

onde  $t$  seria o instante em que o ponto ocupa a posição  $p^i(t)$  e os  $p^{i,j}$  são os pontos de controle da trajetória de  $p^i(\cdot)$ . A figura 10.3 dá uma imagem dessa construção.

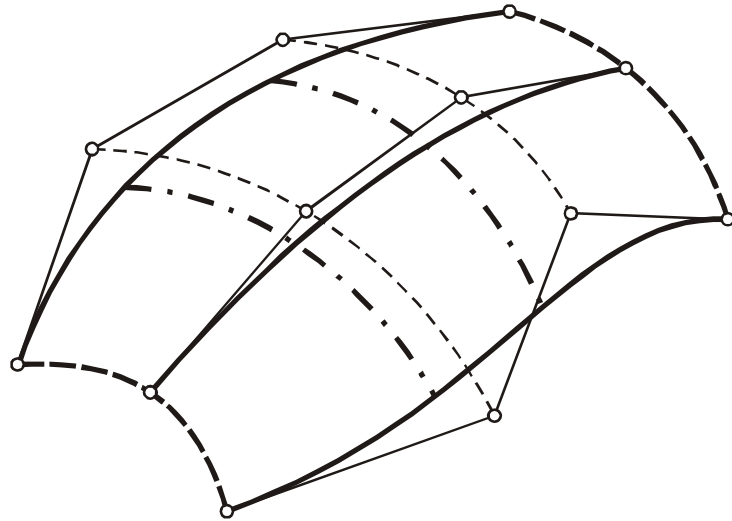
A composição das equações da curva e de seu movimento obtém-se pela substituição das expressões das trajetórias na equação descritiva da curva:

$$p(s, t) = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^m p^{i,j} D_j(t) \right) C_i(s) \quad (10.5)$$

Note que aqui se explicitou a dependência que um ponto da curva tem do tempo. Na expressão (10.5) os pontos dependem agora de dois parâmetros: o parâmetro  $s$  da curva original e o tempo  $t$ . Isso define uma superfície paramétrica cujos pontos são parametrizados por  $(s, t)$ .

Na figura 10.3 as linhas mais espessas estão sobre a superfície. Os pontos marcados representam os pontos de controle de instâncias da curva em movimento. As linhas tracejadas descrevem a trajetória dos 4 pontos de controle da curva. As curvas em traço-ponto descrevem a trajetória no tempo de dois pontos da curva.

FIGURA 10.3 – UMA SUPERFÍCIE PARAMÉTRICA CRIADA PELO MOVIMENTO DE UMA CURVA.



A formulação paramétrica (10.5) é denominada forma-produto tensorial ou simplesmente forma-produto. Há formas mais gerais para exprimirem-se polinômios bi e multivariados, mas a forma-produto tem as vantagens da simplicidade e de possibilitar explorarem-se as propriedades de polinômios univariados. A forma-produto admite uma expressão matricial bastante simples:

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} D_j(v) C_i(u) = \mathbf{D}(v)^T \mathbf{P} \mathbf{C}(u) \quad (10.6)$$

onde as matrizes  $\mathbf{D}(v)$  e  $\mathbf{C}(u)$  são matrizes-coluna cujos elementos são respectivamente os valores  $D_j(v)$  e  $C_i(u)$ , e a matriz  $\mathbf{P}$  é a matriz  $n \times m$  formada pelos coeficientes  $p_{ij}$ . A forma-produto é simétrica nos dois parâmetros e pode ser avaliada também por  $\mathbf{C}(u)^T \mathbf{P}^T \mathbf{D}(v)$ , onde  $\mathbf{A}^T$  denota a transposta da matriz  $\mathbf{A}$ .



### 10.3.1 Formas-produto spline

Pode-se aproveitar o estudo univariado para o bivariado. Serão exploradas aqui algumas propriedades de formas-produto construídas com bases splines. Uma forma-produto spline dá-se na seguinte formulação:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M s_{ij} X_i^n(u) Y_j^m(v) \quad (10.7)$$

tendo apenas splines uni-variadas  $X_i^n$  e  $Y_j^m$ , de graus  $n$  e  $m$  respectivamente, como funções de base. Se essas bases têm por nós as seqüências  $(u_i, i = 0, 1, \dots, N)$  e  $(v_j, j = 0, 1, \dots, M)$ , então a spline bi-mariada  $S$  é polinomial por partes, onde cada parte é um retângulo da forma  $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ . Além disso, o polinômio de cada um desses retângulos admite uma forma-produto.

As ordens de diferenciabilidade das splines de base certamente condicionam a ordem de diferenciabilidade da spline  $S$ . Se as splines  $X_i^n$  e  $Y_j^m$  são diferenciáveis, então seguramente  $S$  é diferenciável, pois suas derivadas parciais são combinações das derivadas das funções de base:

$$\frac{\partial S(u, v)}{\partial u} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M s_{ij} \frac{\partial X_i^n(u)}{\partial u} Y_j^m(v)$$

$$\frac{\partial S(u, v)}{\partial v} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M s_{ij} X_i^n(u) \frac{\partial Y_j^m(v)}{\partial v}$$

O mesmo ocorre com as derivadas de ordem superior já que as derivadas parciais de ordem  $k$  de  $S$  dependem no máximo das derivadas de mesma ordem das funções de base:

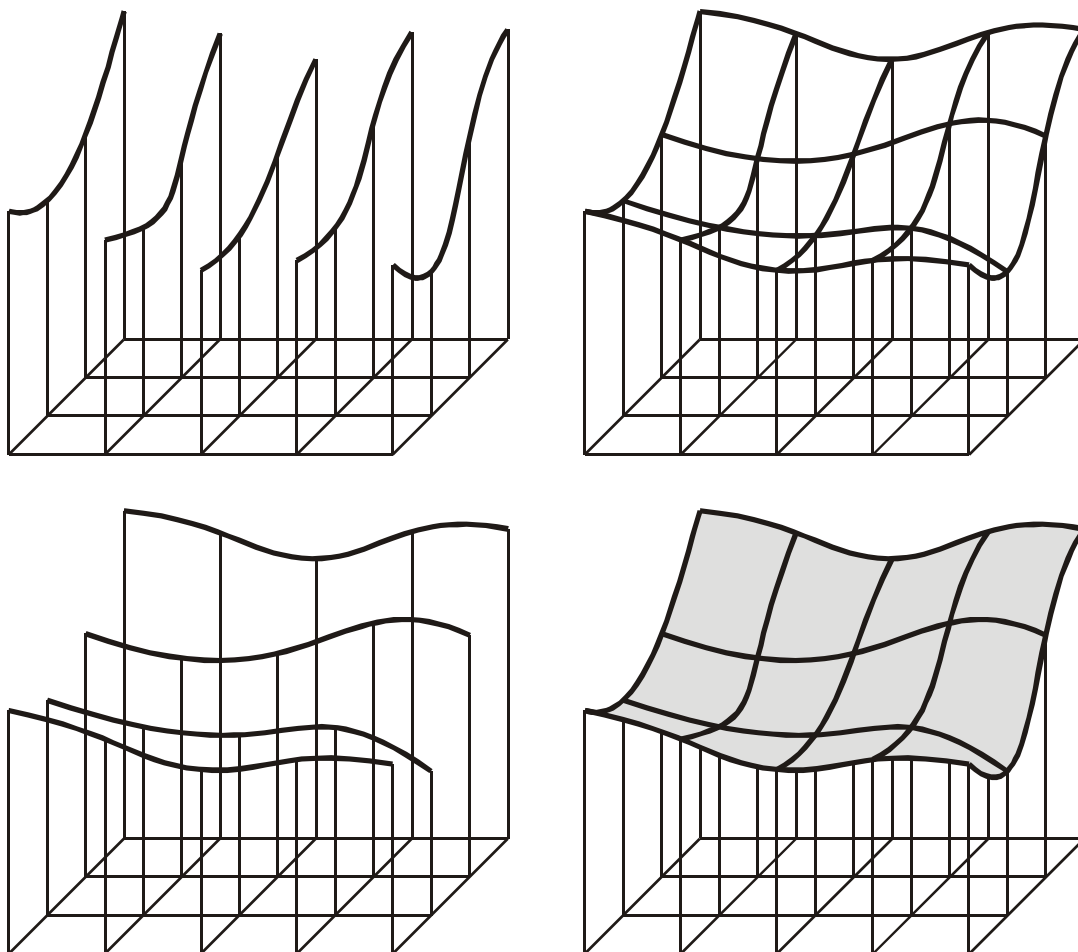
$$\frac{\partial^{k+l} S(u, v)}{\partial u^k \partial v^l} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M s_{ij} \frac{\partial^k X_i^n(u)}{\partial u^k} \frac{\partial^l Y_j^m(v)}{\partial v^l}$$

Ou seja, para se construir uma spline bi-variada com diferenciabilidade até ordem  $k$

basta adotar-se a forma-produto com splines de base diferenciáveis até essa ordem.

## Interpolação com splines

FIGURA 10.4 – SPLINES NATURAIS INTERPOLADORAS.



Considere o seguinte problema de interpolação bi-variada: dados os valores reais  $u_i$ ,  $v_j$  e  $f_{ij}$ , com  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ , determinar uma função real bi-variada  $S$  tal que  $S(u_i, v_j) = f_{ij}$ . Esse problema generaliza os problemas de interpolação uni-variada; restringe-se porém a dados  $f_{ij}$  localizados sobre os nós  $(u_i, v_j)$  de uma grade retangular. Será explorada aqui sua solução com base em splines naturais, ou seja, cúbicas diferenciáveis até a ordem 2.

Na figura 10.4 os interpoladores univariados das linhas e das colunas formam uma malha de linhas sobre a qual a superfície do gráfico do interpolador bivariado se apóia.

Para cada linha  $j$  da malha de dados, pode-se determinar a solução  $L_j$  do problema de interpolação spline univariado daquela linha. Cada interpolador  $L_j$ , cumpre as condições  $L_j(u_i) = f_{ij}$  e pode ser expresso em termos da base de splines naturais:

$$L_j(u) = \sum_{i=0}^N f_{ij} X_i(u)$$

onde  $(X_i, i = 0, 1, \dots, N)$  é base cardinal da spline natural sobre o conjunto de nós  $u_i$ , ou seja,  $X_i(u_k) = \delta_{ik}$ . Observe que a mesma base  $(X_i)$  pode ser usada em cada linha  $j$ , pois os dados  $f_{ij}$  dessa linha estão associados aos mesmos valores de nós  $u_i$ .

De modo semelhante, podem-se interpolar os dados em cada coluna  $i$ , com splines  $C_i$ :

$$C_i(v) = \sum_{j=0}^M f_{ij} Y_j(v)$$

recorrendo à base cardinal  $(Y_j, j = 0, 1, \dots, M)$  da spline natural sobre os nós  $v_j$ . O gráfico das soluções de cada linha e cada coluna formam uma malha retangular de curvas que interpolam as cotas nos vértices da malha de pontos dados (fig. 10.4). O objetivo é determinar  $S$  coincidente com  $L_j$  em cada linha  $j$  e com  $C_i$  em cada coluna  $i$ .

Considere agora a seguinte spline bi-variada, produto daquelas duas bases interpoladoras:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M f_{ij} X_i(u) Y_j(v) \quad (10.8)$$

A spline  $S$  certamente interpola os dados, pois:

$$S(u_k, v_l) = \sum_{j=0}^M \left( \sum_{i=0}^N f_{ij} X_i(u_k) \right) Y_j(v_l) = \sum_{j=0}^M L_j(u_k) Y_j(v_l) = \sum_{j=0}^M f_{kj} Y_j(v_l)$$

$$S(u_k, v_l) = f_{kl}$$

e, em adição,  $S$  é diferenciável até ordem 2 pois as funções de base o são.

Embora a spline  $S$  resolva o problema de interpolação bivariada com a suavidade, a formulação (10.8) está longe de ser de grande valia para a utilização desse modelo, já que não se dispõe das expressões das funções de base nela envolvidas. Note-se que as funções de base dependem de uma forma complexa da particular seqüência de nós das linhas e das colunas da malha. Uma formulação mais adequada seria descrever, para cada retângulo  $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ , a bi-cúbica  $P^{i,j}$  que conforma  $S$  naquele retângulo.

Denote por  $p_{k,l}^{i,j}$  o coeficiente de Bézier de índices  $(k, l)$  da bi-cúbica  $P^{i,j}$ . Naturalmente, os índices  $k$  e  $l$  variam de 0 a 3, e os índices  $i$  e  $j$  de 0 a  $N$  e 0 a  $M$  respectivamente. Pelas condições de interpolação, os coeficientes extremos de cada cúbica coincidem com os dados de entrada:

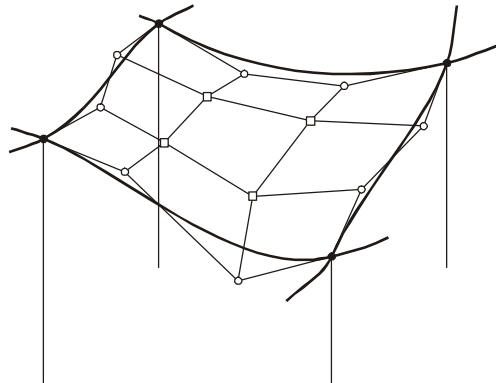
$$p_{0,0}^{i,j} = f_{ij} \quad p_{0,3}^{i,j} = f_{ij+1}$$

$$p_{3,0}^{i,j} = f_{i+1j} \quad p_{3,3}^{i,j} = f_{i+1j+1}$$

Resta então determinar os outros 12 coeficientes.

Ao longo das arestas do retângulo  $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ , o polinômio  $P^{i,j}$  coincide com a spline uni-variada da linha ou coluna correspondente. Então, ao determinarem-se as splines  $L_j, L_{j+1}, C_i$  e  $C_{i+1}$  extrai-se delas a forma do polinômio  $P^{i,j}$  nas arestas de seu retângulo. Veja figura 10.5.

FIGURA 10.5 – UM RETALHO BI-CÚBICO DO GRÁFICO DA SPLINE INTERPOLADORA.



Na figura 10.5 os coeficientes dos vértices coincidem com os dados a interpolar. Os demais coeficientes das arestas são computados pelas derivadas das

splines que interpolam as linhas e colunas. Os últimos 4 extraem-se das derivadas cruzadas da solução nos vértices.

Na discussão de interpolação spline, mostrou-se como as derivadas da spline interpoladora nos pontos de interpolação poderiam ser obtidas pela resolução de um sistema tri-diagonal. Dados quaisquer valores de nós  $t_i$  e quaisquer valores  $h_i$  a interpolar, o sistema de equações fornece como solução as derivadas da spline natural que interpola os  $h_i$  nos nós  $t_i$ . Suponha que as derivadas que os resolvem tenham valor  $d_{ij}$  para cada nó  $u_i$  da linha  $j$ . Sistemas equivalentes podem ser resolvidos para cada coluna resultando no valor da derivada  $c_{ij}$  para o nó  $v_j$  de cada coluna  $i$ .

As derivadas computadas correspondem a derivadas dos interpoladores  $L_j$  e  $C_i$ , e, portanto, de cada bi-cúbica  $P^{ij}$ . Assim,  $d_{ij}$ , por exemplo, satisfaz à relação:

$$d_{ij} = \frac{\partial P^{i,j}(u_i, v_j)}{\partial u} = \frac{3}{u_{i+1} - u_i} (p_{i,j}^{1,0} - p_{i,j}^{0,0}) = \frac{3}{u_{i+1} - u_i} (p_{i,j}^{1,0} - f_{ij})$$

Os valores das demais derivadas nos vértices do retângulo de  $P^{ij}$  satisfazem as relações semelhantes aos coeficientes de Bézier do polinômio. Dessas relações, pode-se calcular mais 8 coeficientes do polinômio correspondentes às quatro arestas do seu domínio:

$$p_{i,j}^{1,0} = f_{ij} + d_{ij}(u_{i+1} - u_i)/3$$

$$p_{i,j}^{2,0} = f_{i+1j} - d_{i+1j}(u_{i+1} - u_i)/3$$

$$p_{i,j}^{1,3} = f_{ij+1} + d_{ij+1}(u_{i+1} - u_i)/3$$

$$p_{i,j}^{2,3} = f_{i+1j+1} - d_{i+1j+1}(u_{i+1} - u_i)/3 \quad (10.9)$$

$$p_{i,j}^{0,1} = f_{ij} + c_{ij}(v_{j+1} - v_j)/3$$

$$p_{i,j}^{3,1} = f_{i+1j} + c_{i+1j}(v_{j+1} - v_j)/3$$

$$p_{i,j}^{0,2} = f_{ij+1} - c_{ij+1}(v_{j+1} - v_j)/3$$

$$p_{i,j}^{3,2} = f_{i+1j+1} - c_{i+1j+1}(v_{j+1} - v_j)/3$$

Para cada polinômio  $P^{ij}$ , restam ainda 4 coeficientes por determinar:  $p_{i,j}^{1,1}$ ,  $p_{i,j}^{2,1}$ ,  $p_{i,j}^{1,2}$  e  $p_{i,j}^{2,2}$ . Estes coeficientes são responsáveis pela derivada cruzada nos vértices do retângulo. De fato, por exemplo:

$$\frac{\partial^2 S(u_i, v_j)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 P^{ij}(u_i, v_j)}{\partial u \partial v} = \frac{p_{ij}^{1,1} + p_{ij}^{0,0} - p_{ij}^{1,0} - p_{ij}^{0,1}}{(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)}$$

Assim, se  $z_{ij}$  é a derivada cruzada da spline  $S$  no vértice  $(u_i, v_j)$  da malha, então os coeficientes restantes podem ser avaliados por meio de:

$$p_{i,j}^{1,1} = -p_{i,j}^{0,0} + p_{i,j}^{1,0} + p_{i,j}^{0,1} + z_{ij}(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)$$

$$p_{i,j}^{2,1} = -p_{i,j}^{3,0} + p_{i,j}^{3,1} + p_{i,j}^{2,0} + z_{i+1j}(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j) \quad (10.10)$$

$$p_{i,j}^{1,2} = -p_{i,j}^{0,3} + p_{i,j}^{1,3} + p_{i,j}^{0,2} + z_{ij+1}(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)$$

$$p_{i,j}^{2,2} = -p_{i,j}^{3,3} + p_{i,j}^{2,3} + p_{i,j}^{3,2} + z_{i+1j+1}(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)$$

Pela expressão de  $S$ , a sua derivada parcial de 1ª ordem ao longo de uma coluna pode ser escrita como:

$$\frac{\partial S(u_k, v)}{\partial u} = \sum_{j=0}^M \frac{dL_j(u_k)}{du} Y_j(v)$$

Mas, como a derivada de  $L_j$  no nó  $u_k$  é exatamente  $d_{kj}$ , a derivada parcial de  $S$  simplifica-se:

$$\frac{\partial S(u_k, v)}{\partial u} = \sum_{j=0}^M d_{kj} Y_j(v)$$

ou seja, para cada coluna  $k$ , a derivada de  $S$  em relação a  $u$  é a spline natural univariada que interpola os valores  $d_{kj}$  nos nós  $v_j$ ! Portanto, para determinar-se a derivada cruzada de  $S$  nos nós da malha basta computar a derivada em relação a  $v$  dessas splines univariadas, através do mesmo algoritmo usado na determinação dos  $d_{ij}$ .

O procedimento elaborado, apesar de longo em sua descrição e tedioso para a espécie humana, é de simples implementação computacional e excelente desempenho. Em resumo, o processo consiste nos seguintes passos:

- i. Para cada linha  $j$ , determine as derivadas  $d_{ij}$  da solução do problema de interpolação univariada dos valores  $f_{kj}$  nos nós  $u_k$ .
- ii. Para cada coluna  $i$ , determine as derivadas  $c_{ij}$  da solução do problema de interpolação univariada dos valores  $f_{il}$  nos nós  $v_l$ .
- iii. Para cada coluna  $k$ , determine as derivadas  $z_{kj}$  da solução do problema de interpolação univariada dos valores  $d_{kl}$  nos nós  $v_l$ .
- iv. Para cada retângulo de origem  $(u_i, v_j)$ , determine os coeficientes de Bézier da bi-cúbica  $P^{ij}$  por meio de das relações (10.9) e (10.10).

No total, durante a execução do algoritmo, são resolvidos  $N+2$  problemas univariados de interpolação spline com  $M+1$  nós e  $M+1$  problemas do mesmo tipo com  $N+1$  nós. Como o custo computacional da resolução de cada problema é proporcional ao número de nós, o custo total desse método é da ordem de  $NM$ , o tamanho da malha de dados. O número total de coeficientes de Bézier computados é  $(3N+4)(3M+4)$ .

A solução construída para o problema de interpolação de dados em uma malha é suave, simples de ser calculada, constituída de polinômios de baixo grau, mas padece de um mal: a solução é globalmente dependente dos dados. Tal qual o caso univariado, a superfície inteira se altera em toda sua extensão (a menos de seus valores nos vértices e algumas linhas e colunas) quando o valor  $f_{ij}$  de um nó é modificado. Assim, todo o sistema de equações deve ser resolvido quando um dado é alterado. Essa natureza global parece ser característica dos métodos lineares de interpolação a base de polinômios.

## B-spline bi-variada

A partir das bases B-spline uni-variadas ( $N_i^n$ ) e ( $N_j^m$ ), com nós ( $u_i, i = 0, 1, \dots, N$ ) e ( $v_j, j = 0, 1, \dots, M$ ) respectivamente, pode-se exprimir splines na forma-produto B-spline:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n} \sum_{j=0}^{M-m} s_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v) \quad (10.11)$$

Essa expressão traz para a formulação bi-variada diversas das propriedades das bases uni-variadas, das quais destaca-se:

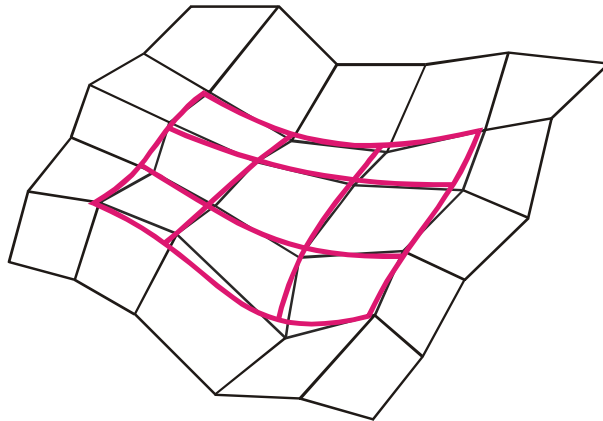
- i. Suporte limitado: cada função de base bi-variada  $N_i^n(\cdot) N_j^m(\cdot)$  possui como suporte o retângulo  $[u_i, u_{i+n+1}] \times [v_j, v_{j+m+1}]$ ;
- ii. Partição da unidade: todas as funções da base B-spline bi-variada são positivas e sua soma é unitária no retângulo  $[u_n, u_{N-n}] \times [v_m, v_{M-m}]$ .

A propriedade de partição da unidade qualifica também as formas-produto B-spline como combinações baricêntricas de seus coeficientes. Assim, podem-se representar nessa forma superfícies paramétricas:

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n} \sum_{j=0}^{M-m} \mathbf{P}^{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)$$

cujos pontos de controle  $\mathbf{P}^{ij}$  tem controle local, devido ao suporte limitado da base. A malha desses pontos de controle forma o poliedro de controle da superfície. Veja a figura 10.6.

FIGURA 10.6 – SUPERFÍCIE PARAMÉTRICA NA FORMA-PRODUTO B-SPLINE.





Na figura 10.6 os pontos de controle formam uma malha regular e têm controle local sobre a forma da superfície.

A avaliação de pontos da superfície pode ser feita da maneira usual: dados  $(\bar{u}, \bar{v})$  no espaço dos parâmetros da superfície, para cada  $i = 0, 1, \dots, N$ , determinam-se os pontos:

$$\mathbf{Q}^i = \sum_{j=0}^{M-m} \mathbf{P}^{i,j} N_j^m(\bar{v})$$

usando-se, por exemplo, o método de Boor para splines univariadas; os pontos  $\mathbf{Q}^i$  são os pontos de controle da curva paramétrica  $\mathbf{S}(\cdot, \bar{v})$  da superfície representada por  $\mathbf{S}$ ; em seguida, calcula-se  $\mathbf{S}(\bar{u}, \bar{v})$  avaliando-se:

$$\sum_{i=0}^{N-n} \mathbf{Q}^i N_i^n(\bar{u})$$

por intermédio, novamente, do método de Boor. Se vários pontos da curva paramétrica  $\mathbf{S}(\cdot, \bar{v})$  são necessários, podem-se determinar os pontos  $\mathbf{Q}^i$  uma única vez para todas as avaliações daqueles pontos.

### 10.3.2 Ajuste a dados esparsos: um estudo de caso

O problema será discutido aqui é uma generalização do problema de interpolação abordado por splines naturais. Suponha que seja dado um conjunto arbitrário de pontos no plano de coordenadas cartesianas  $(s_k, t_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, K$  e que para cada um deles esteja associado um real  $f_k$ . Admite-se que os pontos estão numa região retangular  $[a, b] \times [c, d]$ , na qual se deseja definir uma função  $G$  que interpole aqueles dados, ou seja, para cada  $k$ ,  $G(s_k, t_k) = f_k$ . Esse problema aparece em vários contextos de modelagem, e, em especial, em modelagem de terrenos onde os valores  $f_i$  são atributos de pontos da superfície terrestre tais como altitude, intensidade do campo gravitacional, índices pluviométricos, distribuição em logística etc.

O problema de ajuste definido não é um problema matematicamente bem determinado, e admite uma infinidade de soluções. O que se busca é uma solução

aceitável para o tipo de fenômeno em estudo. Para modelar  $g$  com splines, as primeiras decisões a tomar-se envolvem as escolhas dos nós da splines, e seus graus. Com respeito ao grau, os requisitos da aplicação serão determinantes, pois esta imporá condições mínimas de ordem de continuidade. Se a diferenciabilidade do modelo não é necessária, o melhor será escolherem-se splines lineares reduzindo assim os esforços de modelagem e os custos de avaliação.

Será adotada a spline biquadrática, admitindo-se que a aplicação do modelo requer apenas diferenciabilidade <sup>2</sup>. Se for adotada uma seqüência de  $N+1$  nós na primeira coordenada e  $M+1$  nós na segunda, o espaço de splines bi-variadas na forma-produto terá  $(N-1)(M-1)$  funções na base B-spline, ou seja, será necessário determinar esse número de coeficientes.

A menos que os dados sejam muito particulares (como por exemplo  $f_k = 1$  para todos os pontos), será necessário um número de nós tal que o número de coeficientes a determinar seja ao menos igual ao número de pontos, ou seja,  $(N-1)(M-1) \geq K$ . De fato, cada condição da interpolação, exprime-se numa equação linear a ser satisfeita pelos coeficientes  $g_{ij}$  de  $G$ :

$$G(s_k, t_k) = \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=0}^{M-2} g_{ij} N_i^2(s_k) N_j^2(t_k) = f_k \quad (10.12)$$

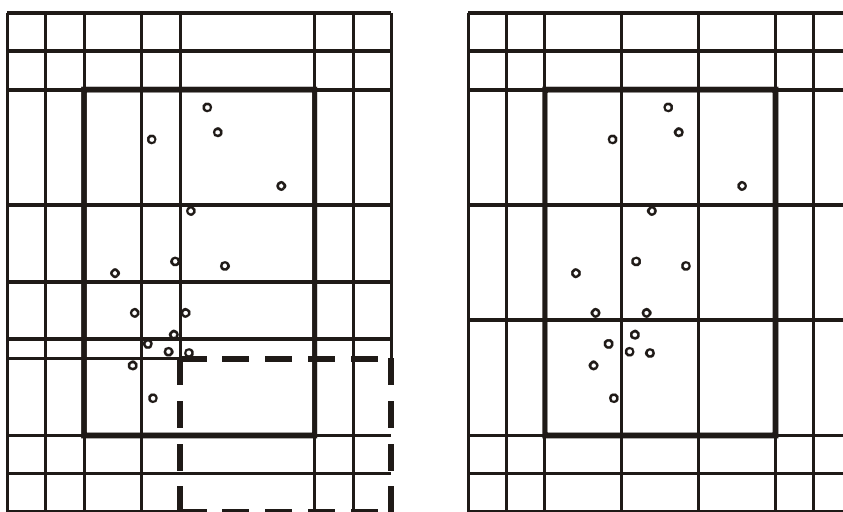
de modo que o sistema resultante terá  $K$  equações e  $(N-1)(M-1)$  incógnitas. Observa-se que, como as funções  $N_i^2$  possuem por suporte apenas três intervalos, cada equação (que corresponde a um ponto) envolverá exatamente 9 coeficientes.

Devido ao suporte limitado da base, em geral, não basta que o número de equações de (10.12) seja dominado pelo número de coeficientes para garantir a existência de solução do sistema. Se os pontos não estão uniformemente distribuídos, então as equações de interpolação exigirão um maior número de coeficientes participantes da expressão da spline nas áreas de mais alta concentração. Isso sugere que, tão importante quanto a definição do número de nós, é fundamental que a escolha dos nós leve em conta a distribuição da massa de pontos. A figura 10.7 dá conta de como uma distribuição adequada dos nós reduz o número de equações em que

participa cada coeficiente.

Na figura 10.7 a distribuição pouco uniforme dos pontos é mais bem subdividida por uma malha irregular de nós. A malha irregular tem menos nós ( $8 \times 10$ ) que a regular ( $9 \times 9$ ) e adapta-se melhor aos pontos. O retângulo de linhas mais espessas demarca a região de interesse do modelo. Na faixa que a circunda, a spline decai a zero.

FIGURA 10.7 – DUAS MALHAS DE NÓS PARA UMA MESMA MASSA DE PONTOS.



Ainda que se escolham judiciosamente os nós da base B-spline, não é de se esperar que o sistema (10.12) admita uma única solução. Em grandes áreas onde não haja pontos, os coeficientes da spline são totalmente irrelevantes pois não participam de nenhuma equação. Examine, como exemplo, o retângulo tracejado da figura 10.7 que é o suporte de uma das funções de base. Nesses casos, o sistema fica indeterminado.

## Deformação

Para selecionar uma das alternativas que satisfaça o sistema, é necessário que seja adotado algum critério além das condições de interpolação. A ondulação da superfície do modelo é um desses critérios: adotá-lo significa selecionar a alternativa com menos variação, mais precisamente, menor derivada de segunda ordem. O nível de variação da superfície (do gráfico da spline) pode ser medido pela integral do quadrado de uma combinação de suas derivadas de segunda ordem:

$$E(G) = \int_a^b \int_c^d \left( \left( \frac{\partial^2 G(u, v)}{\partial u^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 G(u, v)}{\partial u \partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 G(u, v)}{\partial v^2} \right)^2 \right) dudv \quad (10.13)$$

que mede a “deformação” da superfície. O objetivo passa a ser encontrar uma spline  $G$  que respeite as condições do sistema de equações (10.12) e possua a menor deformação  $E(G)$ .

Por mais complexo que esse critério possa parecer, a sua natureza quadrática e a linearidade da expressão da spline simplificam o cálculo da deformação. Suprimindo-se os detalhes do desenvolvimento, a deformação da spline biquadrática  $G$  é uma expressão quadrática nos coeficientes  $g_{ij}$  da spline, ou seja, tem a forma:

$$E(G) = \sum_{i,n=0}^{N-2} \sum_{j,m=0}^{M-2} g_{ij} g_{nm} E_{ijnm} \quad (10.14)$$

onde os coeficientes  $E_{ijnm}$  são integrais definidas de expressões envolvendo apenas as funções da base  $N_i^2$ ,  $N_j^2$ ,  $N_n^2$ ,  $N_m^2$  e suas derivadas.

A adoção do critério de mínima deformação conduz a um problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \sum_{i,n=0}^{N-2} \sum_{j,m=0}^{M-2} g_{ij} g_{nm} E_{ijnm} \\ &\text{sujeito a: } \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=0}^{M-2} g_{ij} N^2(s_k) N^2(t_k) = f_k \text{ com } k = 0, 1, \dots, K \end{aligned}$$

que é um problema de minimização quadrática com restrições lineares. Existem métodos numéricos eficientes de resolução desse tipo de problema, mesmo com dezenas de milhares de variáveis e restrições, desde que a “matriz” do critério de minimização e a matriz das restrições sejam esparsas.

Esse é o caso. Já se observa que cada equação (10.12) envolve apenas 9 coeficientes da spline  $G$ . Portanto, a matriz das restrições do problema de minimização é esparsa. Quanto ao critério, basta notar que os coeficientes  $E_{ijnm}$  são não nulos

somente quando os suportes das funções de base  $N_i^2(.)N_j^2(.)$  e  $N_n^2(.)N_m^2(.)$  se interceptam, ou seja, quando  $|i-n| < 3$  e  $|j-m| < 3$ . Para cada par  $(i, j)$ , isso ocorrerá no máximo para 25 pares  $(n, m)$  o que confirma a esparsidade da matriz do critério.

## Elementos finitos

É interessante notar que se for aumentado o número de nós, o número de variáveis do problema aumenta, mas aumenta também a esparsidade das matrizes. Como consequência, um maior número de variáveis está disponível para reduzir a deformação. O refinamento reiterado da malha de nós da spline reduz sempre a deformação total da superfície. Mais relevante que isso, demonstra-se na literatura de análise numérica que ao reduzir-se a zero os intervalos entre nós, a spline converge para uma superfície que não é polinomial por partes mas é, entre todas as que interpolam os dados pontais, a que menor energia possui.

A solução limite que se aproxima com a spline tem características similares à spline natural uni-variada. A superfície solução possui a forma geométrica que uma chapa fina de material flexível assume quando sujeita a forças aplicadas nos pontos  $(s_k, t_k)$  que a obrigam a alcançar a altura  $f_k$  nesse ponto. É bastante suave e visualmente agradável.

A técnica descrita é parte do fundamento do método de elementos finitos e o problema de otimização formulado é conhecido como o problema de deformação de chapas finas. A abordagem usual de elementos finitos para esse problema, entretanto, não faz uso de malhas retangulares nem de splines na forma-produto. O fundamento de todo modo é o mesmo aqui descrito.

## Métodos aproximativos

Uma abordagem ortogonal em relação à descrita troca a demanda de interpolação por uma maior simplicidade de representação da superfície solução. Nessa abordagem, os valores  $f_k$  não são tomados como uma restrição dura, como uma imposição a atender a todo custo, mas sim como um valor fortemente desejável para  $G$

no ponto  $(s_k, t_k)$ .

A estratégia típica de modelagem de terrenos consiste em dividir a construção do modelo em duas etapas. Na primeira uma malha regular de retângulos é criada e estima-se que valores a função  $G$  em um nó leva em conta os valores dados associados aos pontos que lhe são vizinhos. Os critérios usuais para a estimação são heurísticos.

Na segunda etapa, descartam-se integralmente os dados pontuais, que são substituídos pelos nós da malha e as estimações. Completa-se a construção do modelo aplicando-se à malha de estimações uma técnica de interpolação como a que já foi vista.

Outra estratégia de métodos aproximativos é a de minimização de erros. Ao se dispensarem as condições de interpolação dos dados, é admitido que a superfície solução possa apresentar valores nos pontos amostrais distinto do prescrito. A diferença  $r_k(G) = |G(s_k, t_k) - f_k|$ , usualmente denominada resíduo, é um indicador de quão má é a alternativa  $G$ . Vários índices  $I$  que levam em conta os resíduos podem ser formulados para aferir o “erro” ou a “baixa qualidade” de uma particular alternativa:

- i. Máximo resíduo: enfatiza o maior resíduo desconsiderando os demais e seus valores

$$I(G) = \max \{r_k(G), k = 0, 1, \dots, K\}$$

- ii. Soma dos resíduos: leva todos em conta, mas não considera que algum deles pode ser significativamente maior que os demais

$$I(G) = \sum_{k=0}^K r_k(G)$$

- iii. Soma dos quadrados dos resíduos: leva todos em conta e penaliza os resíduos de maior valor

$$I(G) = \sum_{k=0}^K r_k(G)^2$$

Como todos esse índices são indicadores de baixa qualidade, o critério de

seleção da superfície será minimizar o índice de erro. Os problemas de minimização dos primeiros dois índices podem ser formulados como problemas de programação linear. São problemas de resolução simples por pacotes bastante eficientes.

A resolução do problema de minimização do terceiro critério – o problema de mínimos quadrados – é mais simples do que os anteriores, pois envolve uma quadrática como critério sem qualquer restrição. É um problema equivalente ao de um sistema linear de  $(N-1)(M-1)$  equações com o mesmo número de incógnitas. A matriz do sistema é esparsa e não singular exceto em caso triviais, e uma solução única pode ser obtida por uma técnica convencional que explore a esparsidade da matriz.

A grande vantagem dos métodos aproximativos do tipo descrito sobre os métodos interpoladores está na independência que eles dão na escolha da malha de nós propiciando que malhas regulares sejam usadas para representar a superfície. Malhas regulares são mais fáceis de armazenar e manipular. A contrapartida está na incapacidade de os modelos resultantes respeitarem os dados amostrais. A discrepância é tão mais notável quanto maior for a “rugosidade” inerente aos dados. Observe que uma malha regular não é capaz de capturar variações significativas das cotas  $f_k$  em áreas de mais alta concentração de pontos. A malha, por assim dizer, “filtra” as oscilações presentes nos dados amostrais.